РАЗБИЕНИЯ И ПЕРЕСТАНОВКИ.

ЗАНЯТИЕ 4. ТОЖДЕСТВО РОДЖЕРСА–РАМАНУЖАНА

Обозначим символом $\Phi(N, n)$ количество разбиений числа N, в которых любые два слагаемых отличаются не менее, чем на 2 (нет ни соседних, ни одинаковых слагаемых), и каждое слагаемое не превосходит n. Если ограничений на величину слагаемых нет, то обозначим количество таких разбиений $\Phi(N)$. Также введем обозначения $\varphi_n(q) = \sum_{N=0}^{\infty} \Phi(N, n)q^N$ и $\varphi_\infty(q) = \sum_{N=0}^{\infty} \Phi(N)q^N$. Очевидно, $\varphi_n(q)$ представляет собой многочлен, а $\varphi_\infty(q)$ — бесконечный степенной ряд.

Нетрудно убедиться, что $\varphi_0(q) = 1$ и $\varphi_1(q) = 1 + q$ (мы, как обычно, учитываем пустое разбиение с суммой 0, так что свободный член всех $\varphi_n(q)$ равен 1). Оказывается, существует рекуррентная формула, выражающая $\varphi_n(q)$ через предыдущие члены последовательности:

Предложение 1. $\varphi_n(q) = \varphi_{n-1}(q) + q^n \varphi_{n-2}(q)$.

Доказательство. Любое разбиение числа N без соседних слагаемых, в котором все слагаемые не превосходят числа n, либо содержит число n, либо не содержит. В первом случае все слагаемые, кроме n, не превосходят $n - 2$, и их сумма равна $N - n$, а во втором случае все слагаемые не превосходят $n - 1$. Отсюда получается равенство $\Phi(N, n) = \Phi(N.n - 1) + \Phi(N - n, n - 2)$. Умножая его на q^N и суммируя по всем N, получим требуемое. □

Рекуррентная формула позволяет легко вычислять многочлены $\varphi_n(q)$: $\varphi_2(q) = 1 + q + q^2$, $\varphi_2(q) = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4$, $\varphi_3(q) = 1 + q + q^2 + 2q^3 + 2q^4 + q^5$, и т.д. Если $q = 1$, то рекуррентное соотношение превращается в $\varphi_n(1) = \varphi_{n-1}(1) + \varphi_{n-2}(1)$, откуда вытекает

Следствие 1. $\varphi_n(1)$ *равно n-ому числу Фибоначчи.*

Из предложения 1 вытекает, что $\varphi_n(q)$ отличается от $\varphi_{n-1}(q)$ только слагаемыми, содержащими q в степени n и выше. Отсюда следует, что с ростом n число $\Phi(N, n)$ стабилизируется; стабильное значение есть $\Phi(N)$. В этом смысле можно писать $\varphi_\infty(q) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(q)$.

Многочлены $\varphi_n(q)$ тесно связаны с q-биномиальными коэффициентами:

Предложение 2. $\varphi_n(q) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{k(5k+1)/2} \binom{n+1}{[(n+1-5k)/2]}_q$.

В правой части равенства суммирование реально производится по тем k (положительным и отрицательным), для которых $0 \le [(n + 1 - 5k)/2] \le n + 1$; квадратные скобки означают целую часть. Тем самым, производится суммирование с надлежащим весом элементов $(n+1)$-ой строки q-треугольника Паскаля, причем после элемента номер s берется $s + 2$, затем $s + 5$, затем $s + 7$, и т.д. — см. рис. 1.

Для доказательства нам нужно дважды воспользоваться формулами q-треугольника Паскаля (см. занятие 1). Нужно доказать, что построчные суммы обведенных кружком элементов q-треугольника Паскаля, взятых с надлежащим весом, удовлетворяют тождеству для q-чисел Фибоначчи. Вся картина разбивается на шестиугольные фрагменты (один из них обведен на рисунке); вычисления ведутся в каждом из них по отдельности. На рис. 1 предполагается, что n четно; для нечетного n картина симметричная. Вначале к элементам нижней строки, обведенным кружком, применяется вторая формула q-треугольника. Получается сумма, содержащая элементы средней строки с некоторыми весами. Элементы, обведенные кружком, остаются как есть (они войдут в окончательную формулу), а элементы, заключенные в прямоугольник,

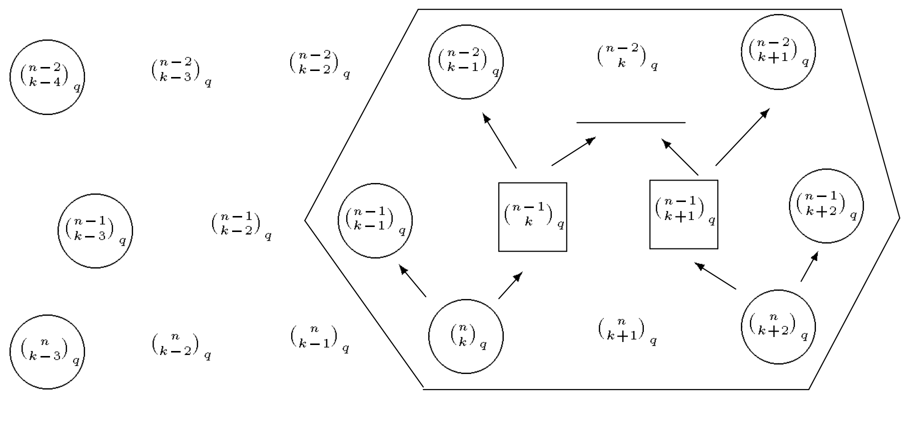

Рис. 1. Суммирование

раскладываются еще раз — по первой формуле. При этом получается взвешенная сумма, содержащая элементы верхней строки. Для доказательства нужно проверить (в этом и заключаются вычисления), что все элементы входят в сумму с надлежащим весом — вес элементов, обведенных кружком, дается формулой Роджерса–Рамануджана и тождеством для q-чисел Фибоначчи, а вес подчеркнутого элемента должен быть равен нулю.

Мы не будем проводить эти вычисления подробно — это несложно, но довольно долго и скучно.

Перейдем в полученной формуле к пределу при $n \to \infty$:

Следствие 2 (предложения 2). $\varphi_\infty(q) = \prod_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5m+1})(1-q^{5m+4})}$.

Доказательство.

$$\begin{aligned}\varphi_\infty(q) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{k(5k+1)/2} \lim_{n\to\infty} \binom{n+1}{[(n+1-5k)/2]}_q &= \\ = \prod_{m=0}^{\infty} \frac{1}{1-q^m} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{k(5k+1)/2} &= \\ \text{(по следствию формулы Якоби, см. занятие 3)} & \\ = \prod_{m=0}^{\infty} \frac{(1-q^{5m})(1-q^{5m+3})(1-q^{5m+2})}{1-q^m} &= \\ = \prod_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5m+1})(1-q^{5m+4})}. &\end{aligned}$$

□

Полученное равенство имеет комбинаторный смысл. Действительно, коэффициент при q^N в левой части равен, по определению, количеству разбиений числа N на слагаемые, среди которых нет ни равных, ни соседних. Тот же коэффициент в правой части равен количеству разбиений числа N на слагаемые (возможно, повторяющиеся), дающие при делении на 5 остатки 1 и 4. Тем самым эти два числа равны — это теорема Роджерса–Рамануджана.

Задача 1. Докажите формулу $\varphi_n(q) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+1-k}{k}_q q^{k^2}$ и выведите из нее формулу $\varphi_\infty(q) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{k^2}}{(q)_k}$. Укажите комбинаторный смысл полученного равенства.