Пфаффианы и перечисление паросочетаний

М. Н. Вялый

Дубна, 19 – 30 июля 2004 года

Аннотация

Основной задачей, которая будет обсуждаться в курсе, является подсчет укладок домино на прямоугольную доску. Для этой задачи есть замечательный ответ, выражающий искомое число укладок через длины диагоналей правильных многоугольников.

Количество способов укладки домино на прямоугольную доску размера $m \times n$ при условии, что используется r вертикальных домино и s горизонтальных, равно коэффициенту при $v^r h^s$ в выражении

$$D_{mn}(v,h) = 2^{mn/2} \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant m \\ 1 \leqslant k \leqslant n}} \left(\left(\cos^2 \frac{j\pi}{m+1}\right) v^2 + \left(\cos^2 \frac{k\pi}{n+1}\right) h^2 \right)^{1/4}. \quad (!)$$

Заметим, что из (!) сразу получаются такие следствия:
а) $D_{mn}(v,h)$ — многочлен;
б) $D_{mn}(1,1)$ — целое число (количество способов укладки домино на доску $m \times n$).

Увидеть эти свойства $D_{mn}(v,h)$ непосредственно из формулы (!) не очень просто.

Рассказ будет идти в основном про многочлены, известные как детерминант, пфаффиан и перманент. В качестве побочной темы планируется обсудить сложность вычисления этих многочленов. Будет рассказано, почему вычисление детерминанта — простая задача, и сформулировано, что означает трудность вычисления перманента. Будет также объяснено, почему подсчет числа паросочетаний в графе значительно упрощается, если граф можно нарисовать на плоскости без самопересечений.

Знание линейной алгебры сильно облегчает понимание этого курса, но не является обязательным для почти всех затрагиваемых в нем вопросов.