1. Предварительные замечания. Знак перестановки и паросочетания. Детерминант

1.1. Предварительные замечания

Доказательство формулы (!) будет длинным и непростым. Естественный вопрос: а нельзя ли получить эту формулу более простым или хотя бы более прямым способом? Ответ на этот вопрос уклончивый: пока это никому не удалось сделать. Можно ограничиться даже случаем доски $(2 \times n)$.

1.1: Докажите, что количество способов уложить домино на доску $(2 \times n)$ равно числу Фибоначчи F_{n+1} $(F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ F_1 = F_2 = 1)$.

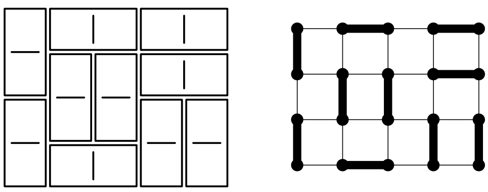
1.2*: Докажите, что

$$F_{n+1}^2 = \prod_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(1 + 4\cos^2 \frac{k\pi}{n+1}\right),$$

не используя (!).

Звездочкой я буду обозначать задачи, которые вы не сумеете решить. Это не значит, что нужно решать только такие задачи — среди остальных много простых упражнений, но они крайне полезны для понимания. Простые упражнения и задачи, решение которых требует либо смекалки, либо знаний, сознательно никак не разделяются.

Чтобы доказать формулу (!), мы рассмотрим более общую задачу подсчета числа *совершенных паросочетаний* в графе. Совершенное паросочетание — это такое разбиение множества вершин графа на пары, каждая из которых связана ребром в графе. Укладкам домино взаимно однозначно соответствуют совершенные паросочетания на графе прямоугольной решетки, как можно увидеть из рис. 1.



а) б)

Рис. 1. Переход от укладки домино к совершенному паросочетанию в графе прямоугольной решетки

Формулу (!) придумали физики. Зачем им она понадобилась — отдельная тема, которую я затрагивать не буду. Коротко говоря, при попытках вычислить величины, характеризующие вещества (температура плавления, скажем), физики приходят к слишком трудным задачам, решить которые они не могут. Тогда они упрощают задачу и получают красивые формулы (наподобие (!)), которые дают ответ в случае несуществующих в природе веществ («сухая вода», «двумерный лед»). Остается надежда, что когда-нибудь изучение красивых формул натолкнет физиков на мысль, как же разобраться с реальными веществами.

Задача подсчета числа паросочетаний в произвольном графе вычислительно трудна. Наша цель — найти такие графы, для которых эта задача решается относительно легко (хотелось бы также, чтобы граф прямоугольной решетки оказался среди таких «хороших» графов). Для достижения этой цели мы сопоставим графу с e ребрами некоторый многочлен от e переменных, значение которого *всегда* легко вычислить. *В некоторых случаях* это значение равно числу совершенных паросочетаний. Граф прямоугольной решетки окажется среди этих случаев.

1.2. Знак перестановки и паросочетания

Сначала напомним некоторые хорошо известные факты о перестановках.

Перестановка множества $\{1, \ldots, v\}$ — это взаимно однозначное отображение этого множества на себя. Множество всех перестановок обозначим через S_v. Перестановки можно перемножать: произведение перестановок — это композиция отображений. Произведение перестановок будем обозначать знаком $\circ$.

Тождественная перестановка id оставляет все элементы на месте.

1.3: Для каждой перестановки π однозначно определена обратная π^{-1}, для которой выполняется равенство $\pi \circ \pi^{-1} = \mathrm{id}$.

Можно задать перестановку, указав ее разложение на циклы:

$$\pi = (a_1^1 a_2^1 \ldots a_{k_1}^1)(a_1^2 a_2^2 \ldots a_{k_2}^2) \ldots (a_1^{c(\pi)} a_2^{c(\pi)} \ldots a_{k_{c(\pi)}}^{c(\pi)}). \tag{1}$$

Внутри каждой пары скобок числа переставляются циклически: $\pi(a_1) = a_2$, $\pi(a_2) = a_3$, $\ldots$, $\pi(a_k) = a_1$. Разложение на циклы определено с точностью до циклических сдвигов чисел внутри скобок. Это легко понять, если проследить за *орбитой* числа, т.е. образами числа при последовательных применениях π. Циклы длины 1, т.е. неподвижные точки перестановки, при записи в виде произведения циклов обычно пропускаются.

Знак $\mathrm{sgn}(\pi)$ перестановки π — это число $(-1)^{n+k}$, где n — число элементов, k — число циклов (включая циклы длины 1!). Перестановка называется *четной*, если ее знак равен $+1$, в противном случае она называется *нечетной*.

Перестановки (jk), меняющие местами пару чисел j и k, называются *транспозициями*.

1.4: Транспозиция — нечетная перестановка.

1.5: Любую перестановку можно разложить в произведение транспозиций.

1.6: Умножение перестановки на транспозицию (jk) меняет количество циклов на 1: увеличивает, если j и k входят в один цикл; уменьшает, если j и k входят в разные циклы.

Отсюда получаем следующую полезную лемму.

Лемма 1. *Четность числа транспозиций одинакова для всех разложений данной перестановки в произведение транспозиций.*

1.7: При перемножении перестановок их знаки тоже перемножаются:

$$\operatorname{sgn}(\pi \circ \sigma) = \operatorname{sgn}(\pi)\operatorname{sgn}(\sigma). \tag{2}$$

Приведем еще несколько фактов о четности перестановок.

1.8: *Инверсия* (беспорядок) перестановки π — это такая пара (j, k), что $j < k$, а $\pi(j) > \pi(k)$. Четность перестановки совпадает с четностью числа инверсий.

1.9: Четность перестановки совпадает с четностью числа циклов четной длины.

1.10: Четность перестановки совпадает с четностью обратной к ней перестановки.

Пусть теперь v четно. *Совершенным паросочетанием* на множестве $\{1, \dots, v\}$ назовем разбиение этого множества на пары (слово «совершенный» иногда будем опускать). Множество всех паросочетаний на множестве $\{1, \dots, v\}$ обозначим P_v.

Как приписать знаки паросочетаниям? Паросочетания естественно отождествляются с *инволюциями без неподвижных точек*, т. е. такими перестановками, которые разлагаются в произведение циклов длины 2. Но знак любой такой перестановки равен $(-1)^{v/2}$, так что нужно придумать что-нибудь похитрее.

Если в каждой паре, входящей в паросочетание, задать порядок (т. е. указать, какая из вершин является первой), получим *ориентированное паросочетание*. Перенумерация определяет *действие* перестановок на множестве ориентированных паросочетаний:

$$\pi((p_1, p_2), \dots, (p_{v-1}, p_v)) = ((\pi(p_1), \pi(p_2)), \dots, (\pi(p_{v-1}), \pi(p_v))). \tag{3}$$

Пусть перестановка π переводит какое-то ориентированное паросочетание в себя. Тогда π разлагается в произведение перестановок, меняющих местами первые и вторые вершины одинаковым образом (см. рис. 2). Четность этих перестановок одинакова, поэтому π четна.

Отсюда следует, что четность перестановок, переводящих одно ориентированное паросочетание в другое, одинакова: если π, σ — две такие перестановки, то $\pi\sigma^{-1}$ переводит исходную перестановку в себя.

Поскольку знак произведения перестановок равен произведению знаков, корректно следующее определение.

Два ориентированных паросочетания имеют одинаковые знаки, если одно переводится в другое четной перестановкой; разные знаки, если одно переводится в другое нечетной перестановкой.

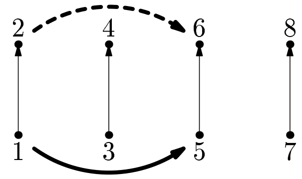


Рис. 2. Если перестановка сохраняет ориентированное паросочетание и переводит 1 в 5, то она должна переводить 2 в 6.

Мы определили лишь отношение знаков двух ориентированных паросочетаний. Если нужно однозначно определить знаки ориентированных паросочетаний, достаточно выбрать какое-то и приписать ему знак «+». Обычно полагают, что паросочетание $(1,2)(3,4)\dots((v-1),v)$ имеет знак «+».

Чтобы приписать знаки неориентированным паросочетаниям, зададим *ориентацию* на парах чисел, т. е. для каждой пары чисел укажем, какое из чисел является первым в этой паре. Тогда каждому паросочетанию однозначно соответствует ориентированное паросочетание с теми же парами вершин.

Пусть задана ориентация и два паросочетания p, q. Возьмем v точек и занумеруем их числами $1, 2, \dots, v$. Пары, входящие в паросочетание p, соединим тонкими линиями, а пары, входящие в q, — жирными. Нарисуем ориентации: поставим стрелки, ведущие от первой вершины в паре ко второй (см. пример на рис. 3). Из каждой точки выходит ровно две линии, так что получили набор циклов четной длины.

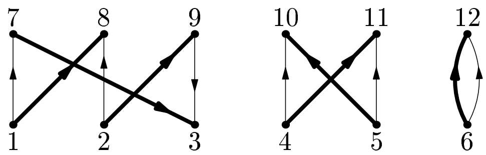


Рис. 3. Пример паросочетаний разного знака

Пусть a — общее количество ребер, ориентированных по циклу, а b — ориентированных против. Для циклов четной длины четность a и b одинакова. Число $(-1)^{1+b}$ будем называть *знаком цикла* F и обозначать $s(F)$.

Замечание 1. Заметим, что знак цикла определен не только для циклов четной длины. Для циклов нечетной длины $s(F) = (-1)^{1+b} = (-1)^a$ и знак цикла зависит от направления обхода цикла.

Лемма 2. *Знаки паросочетаний различаются на произведение знаков циклов, образованных этими паросочетаниями.*

Доказательство. Получим одно паросочетание из другого в два приема. Вначале применим перестановку, сдвигающую числа вдоль циклов, образованных паросочетаниями. Четность этой перестановки совпадает с четностью количества циклов. Теперь согласуем ориентации транспозициями чисел, входящих в пары второго паросочетания. Четность количества требуемых транспозиций совпадает с четностью числа ребер, ориентированных по циклам. Это легко увидеть, рассмотрев следующую таблицу, в которой ребра разбиты на пары: ребро из паросочетания p и то ребро, паросочетания q, в которое оно переходит.

ребер по циклу:	1	1	2	0
требуется транспозиций:	1	1	0	0

Итак, четность перестановки, переводящей одно (ориентированное) паросочетание в другое равна суммарной четности количества циклов и количества ребер, ориентированных по циклам. Но это и есть произведение знаков циклов. □

1.2.1. Транзитивная ориентация

Это такая ориентация множества чисел, при которой первым считается меньшее число в паре. Транзитивная ориентация часто используется. Нам она не нужна, но желающие могут выполнить пару простых упражнений, чтобы научиться считать знаки паросочетаний.

1.11: Знак паросочетания $(j_1, k_1), (j_2, k_2), \ldots$ (предполагается, что $j_a < k_a$) относительно транзитивной ориентации равен знаку перестановки

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ j_1 & k_1 & j_2 & k_2 & \ldots \end{pmatrix}$$

Построим диаграмму паросочетания следующим образом. На прямой отметим последовательно точки с номерами 1, 2, ..., v. Если пара точек j, k входит в паросочетание, соединим соответствующие точки дугой в верхней полуплоскости.

1.12: Знак паросочетания относительно транзитивной ориентации совпадает с четностью числа пересечений дуг в диаграмме паросочетания.

1.3. Детерминант

Детерминант и пфаффиан, к рассмотрению которых мы переходим, имеют естественные определения на языке линейной алгебры. Но начнем мы с прямого комбинаторного определения. Свойства детерминанта, которые нам потребуются в вычислениях, мы рассмотрим позже.

Рассмотрим матрицу A размера $v \times v$, в j-й строке и k-м столбце которой находится переменная $a_{j,k}$. *Детерминант* A по определению равен

$$\det A = \sum_{\pi \in S_v} \operatorname{sgn}(\pi) A(\pi), \quad \text{где } A(\pi) = \prod_{k=1}^{v} a_{k,\pi(k)}. \tag{4}$$

Итак, детерминант — это многочлен степени v от v^2 переменных. В формулу (8) входит $v!$ слагаемых. Однако, чтобы вычислить значение детерминанта, не нужно делать так много операций.

1.13: Докажите, что значение детерминанта числовой $v \times v$ матрицы можно найти за $O(v^3)$ арифметических операций.

В формуле (8) используются только сложения и умножения. Поэтому детерминант определен и в тех случаях, когда деление не всегда определено (например, когда элементы матрицы — многочлены или целые числа). Поэтому следующая задача имеет самостоятельный интерес.

1.14*: Докажите, что значение детерминанта можно найти за $\operatorname{poly}(v)$ операций умножения и сложения (вычитание — это умножение на -1 и сложение).

1.4. Задачи вычисления детерминанта

Число укладок домино мы будем выражать через детерминант некоторой матрицы. Чтобы получить формулу (!), нужно уметь считать детерминанты. Есть много приемов подсчета детерминантов, часть из них отражена в следующих задачах. Поэтому крайне рекомендуется их порешать (спустя некоторое время мы разберем решения большинства из них, но намного полезнее решить их самостоятельно). При решении полезно знание линейной алгебры, но часть задач решается «в лоб» — непосредственно из данного выше определения.

1.16: Матрица (a_{jk}) называется (верхней) треугольной, если все ее элементы под главной диагональю равны 0, т. е. при $j > k$ выполнено $a_{jk} = 0$. Докажите, что для треугольной матрицы $\det(a_{jk}) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.

1.17: Пусть матрица A имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & M \\ -M & 0 \end{pmatrix},$$

матрица M — квадратная. Докажите, что $\det A = (\det M)^2$.

Найти детерминанты матриц (палочки вокруг матрицы обозначают детерминант)

1.18: $$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots} & \lambda & 1 \\ 1 & \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots} & \lambda \end{vmatrix}$$

1.19: $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{vmatrix}$$

Найти детерминанты симметричных матриц

1.20: $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\dots\dots} & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

1.21: $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \dots \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 1 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

1.22: Матрица H_n состоит из 2^n строк и 2^n столбцов. Занумеруем строки и столбцы словами из 0 и 1 длины n. Элемент $(H_n)_{\alpha\beta}$ равен $(-1)^{\alpha\cdot\beta}$, где $\alpha \cdot \beta$ обозначает количество таких позиций j, что $\alpha_j = \beta_j = 1$. Найдите детерминант H_n.