2. Пфаффиан

Далее считаем v четным. Рассмотрим *кососимметричную* матрицу A размера $v \times v$, т. е. матрицу, для которой $a_{j,k} = -a_{k,j}$. Нам будет удобно выделить в кососимметричной матрице «знаки» и «абсолютные величины». Сделаем это так. Введем переменные $a_{(jk)}$, зависящие от неупорядоченной пары индексов, и некоторую ориентацию. По ориентации построим кососимметричную матрицу ε: $\varepsilon_{jk} = 1$, если в паре (j,k) первой является вершина j; $\varepsilon_{jk} = -1$, если первой является вершина k; по диагонали стоят нули: $\varepsilon_{kk} = 0$.

Теперь полагаем $a_{j,k} = a_{(jk)}\varepsilon_{jk}$.

Пфаффиан A равен

$$\mathrm{Pf}(A) = \sum_{p \in P_v} \varepsilon(p)\tilde{A}(p), \tag{5}$$

где $\tilde{A}(p)$ — произведение $a_{(jk)}$ по всем парам (jk), входящим в паросочетание p, а $\varepsilon(p)$ — знак паросочетания p относительно ориентации ε.

Имеет место замечательное соотношение:

$$\det A = (\mathrm{Pf}\, A)^2. \tag{6}$$

Поскольку детерминант вычислять легко, то и пфаффиан вычислять тоже легко. На самом деле, даже легче, чем кажется из формулы (6).

2.1*: Укажите способ вычисления пфаффиана $v \times v$ матрицы, который использует полиномиальное от v количество операций умножения и сложения и не использует деления и вычисления квадратного корня.

Формулу (6) проще доказать «по-научному», используя более осмысленные определения детерминанта и пфаффиана. Однако элементарное доказательство в стиле «раскроем скобки и приведем подобные», хотя и более громоздкое, также весьма поучительно. Его идея состоит в том, что перестановки с циклами нечетной длины дают нулевой вклад в детерминант кососимметричной матрицы, а перестановки из циклов четной длины естественно отождествляются с парами паросочетаний. При этом знаки согласуются.

Разберем это рассуждение подробнее. Слагаемые в формуле (8), по которой вычисляется значение детерминанта, разделим на три группы:

A: содержащие неподвижную точку (т. е. цикл длины 1);

B: не содержащие неподвижных точек, но содержащие цикл нечетной длины;

C: состоящие только из циклов четной длины.

Запишем слагаемые, составляющие детерминант, через ориентации и симметричные переменные $a_{(jk)}$. Получаем равенство

$$\mathrm{sgn}(\pi)A(\pi) = \prod_{F} s(F)A(F), \tag{7}$$

где произведение берется по циклам перестановки π, а $A(F)$ — произведение $a_{(jk)}$ вдоль цикла F.

Слагаемые из группы А равны 0, так как $a_{jj} = -a_{jj} = 0$ по определению кососимметричной матрицы.

Слагаемые из группы В можно разбить на пары с противоположными значениями, так что их общий вклад в детерминант равен 0. Чтобы описать такое разбиение на пары, выделим в перестановке цикл нечетной длины, который содержит наименьшее из чисел, входящих в циклы нечетной длины. Назовем этот цикл минимальным нечетным. Изменение направления обхода минимального нечетного цикла задает требуемое разбиение слагаемых на пары. В силу (7) эти слагаемые имеют противоположные значения.

Теперь перейдем к слагаемым из группы С. Сопоставим перестановкам, состоящим из циклов четной длины, упорядоченные пары паросочетаний. Циклу длины $(a_1 \dots a_{2k})$, конечно, соответствуют паросочетания $(a_1, a_2), (a_3, a_4), \dots, (a_{2k-1}, a_{2k})$ и $(a_2, a_3), (a_4, a_5), \dots, (a_{2k}, a_1)$. Как их упорядочить? Будем считать, что a_1 — наименьшее из чисел $a_1, \dots, a_{2k}$, а паросочетание, включающее (a_1, a_2), — первое. Это определение неприменимо к циклу длины 2, но в этом случае паросочетания совпадают и потому их порядок неважен.

Итак, мы сократили часть слагаемых в левой части равенства (6), а остальным взаимно однозначно сопоставили какие-то слагаемые в правой части (6) (разумеется, после раскрытия скобок). Описанное выше соответствие гарантирует, что соответствующие слагаемые содержат одни и те же переменные $a_{(jk)}$, причем в одинаковой степени. А знаки у соответствующих слагаемых совпадают по правилу определения знака паросочетания и в силу формулы (7).