3. Пфаффовы ориентации

3.1. Хороший случай

Попробуем вычислить количество совершенных паросочетаний в графе, используя пфаффиан. Для этого занумеруем вершины графа и ориентируем его ребра, после чего сопоставим графу *ориентированную матрицу смежности*: $A_{j,k} = \pm 1$, если пара (jk) является ребром графа (знак определяется ориентацией); $A_{j,k} = 0$, если пара (jk) не является ребром графа. Пфаффиан такой матрицы равен сумме знаков совершенных паросочетаний графа.

Граф назовем *пфаффовым*, если существует ориентация его ребер, относительно которой знаки всех паросочетаний в этом графе равны. (Такую ориентацию будем называть *пфаффовой*.)

Итак, подсчет числа совершенных паросочетаний в пфаффовом графе сводится к вычислению пфаффиана (или квадратного корня из детерминанта) ориентированной матрицы смежности.

3.2. Паросочетания в плоском графе

Важным частным случаем пфаффовых графов, с которого и началась вся эта теория, являются планарные графы.[1)] *Планарный* граф можно нарисовать на плоскости так, чтобы линии, изображающие его ребра, не пересекались (естественно, за исключением концов). Саму картинку, изображающую граф указанным выше способом, будем называть *плоским графом*. *Грань* плоского графа — это цикл, внутри которого не лежит ни одной вершины. *Бесконечная грань* — это цикл, вне которого не лежит ни одной вершины.

Теорема 1. *Плоский граф является пфаффовым.*

Прежде чем доказывать теорему 1, сделаем несколько упрощающих замечаний и докажем две леммы.

Заметим, что отношение знаков паросочетаний определяется знаками циклов. Поэтому достаточно рассмотреть только связные плоские графы без мостов. (*Мост* — это ребро графа, через которое не проходит ни одного цикла. Ориентации мостов не влияют на знаки паросочетаний.) Если в плоском связном графе нет мостов, то каждое его ребро смежно в точности с двумя гранями (конечными или бесконечной).

Лемма 3. *Пусть в ориентированном плоском связном графе без мостов n внутренних вершин (не лежащих на бесконечной грани). Тогда знак бесконечной грани равен произведению знаков конечных граней, умноженному на $(-1)^n$.*

Доказательство. Фиксируем направление обхода против часовой стрелки. Каждое ребро, не входящее в бесконечную грань, проходится в противоположных направлениях при обходах смежных с ним граней. Поэтому вклад в

[1)] По-видимому, теорему 1 впервые сформулировал и доказал П. Кастелейн.

произведение ориентаций от такого ребра всегда равен -1. Пусть в графе m ребер на бесконечной грани, k внутренних ребер и f конечных граней.

Произведение знаков конечных граней равно $(-1)^{k+f}a$, где a — произведение ориентаций ребер вдоль бесконечной грани. Знак бесконечной грани равен $-a$. По теореме Эйлера

$$(n+m)-(m+k)+(f+1)=2,$$

поэтому

$$-a=(-1)^{n-k+f}a=(-1)^n(-1)^{k+f}a,$$

что и требовалось доказать. □

Лемма 4. *Существует ориентация плоского связного графа без мостов и с четным числом вершин, относительно которой знаки всех граней равны* $+1$.

Доказательство. Лемму проще доказать, переходя к двойственному графу. Напомним построение двойственного графа. В каждой грани исходного графа лежит ровно одна вершина двойственного графа, вершины двойственного графа соединим ребром, пересекающим ребро исходного графа, которое лежит на обеих гранях, соответствующих выбранным вершинам (а если такого ребра нет, не будем соединять вершины ребром).

По ориентации графа построим ориентацию двойственного графа: потребуем, чтобы кратчайший поворот от ориентированного ребра исходного графа к ориентированному ребру двойственного происходил против часовой стрелки.

Посмотрев на рис. 4, легко понять, что утверждение леммы равносильно такому: в связном плоском графе, имеющем четное число граней, можно так ориентировать ребра, чтобы из каждой вершины выходило нечетное число ребер. Докажем это последнее утверждение.

Возьмем произвольную ориентацию. Поскольку граней — четное количество, в силу теоремы Эйлера четность числа вершин и четность числа ребер совпадают. Пусть v_0, v_1 — количество вершин, из которых выходит соответственно четное или нечетное количество ребер. Тогда $e=v_1 \pmod 2$ и $v_0+v_1=e \pmod 2$ в силу четности числа граней. Значит, v_0 — четно. Разобьем все вершины, из которых выходит четное количество ребер, на

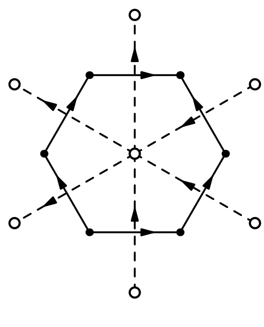

Рис. 4.

пары и соединим каждую пару путем в графе. Поменяем ориентации ребер вдоль всех выбранных путей. Четность количества выходящих ребер в промежуточных вершинах не изменится (поскольку меняется у четного числа ребер), а концевых — изменится. Получаем искомую ориентацию. □

Ориентацию, относительно которой знаки всех граней положительны, назовем *однородной*. Лемма 4 гарантирует существование однородной ориентации для плоского графа. Мы завершим доказательство теоремы 1, если докажем, что однородная ориентация плоского графа является пфаффовой. Для этого используем лемму 3.

Итак, пусть паросочетания в плоском связном графе различаются на циклы $F_1, \ldots, F_m$. Внутри каждого такого цикла находится четное количество вершин (они ведь разбиты на пары паросочетанием), поэтому в силу леммы 3 знаки этих паросочетаний относительно однородной ориентации совпадают.

Теорема 1 доказана.

3.3. Графы ограниченного рода

Любой граф можно нарисовать без самопересечений на какой-нибудь ориентированной поверхности. Ориентированная поверхность — это сфера с g ручками, число g называется родом поверхности. Наименьший род поверхности, на которой можно нарисовать граф, называется родом графа. Число паросочетаний в графе можно сравнительно легко найти, если род поверхности не слишком велик. В частности, число паросочетаний графа на поверхности рода g можно записать в виде линейной комбинации 2^g пфаффианов. Есть и другой способ вычисления числа паросочетаний для этого случая, использующий полиномиальные матрицы инциденций.

3.1*: Постройте полиномиальный алгоритм подсчета числа совершенных паросочетаний в графе ограниченного рода.