4. Как считать детерминанты

4.1. Элементарные вычисления

Если матрица содержит много нулей, то часть слагаемых в формуле

$$\det A = \sum_{\pi \in S_v} \operatorname{sgn}(\pi) A(\pi), \quad \text{где } A(\pi) = \prod_{k=1}^{v} a_{k,\pi(k)}, \tag{8}$$

пропадает.

Решение 1.16. В случае треугольной матрицы формула (8) состоит из одного слагаемого, отвечающего единичной перестановке. Чтобы доказать это, нужно проверить такой факт: если в перестановке $j \leqslant \pi(j)$, то перестановка единичная (значит, $j = \pi(j)$). Это просто: возьмем любой цикл длины больше 1, а в нем — наибольшее число m. Тогда $m > \pi(m)$. Значит, в рассматриваемой перестановке все циклы имеют длину 1.

Решение 1.17. Обозначим число строк в матрице A через $2n$. Пусть $A(\pi) \neq 0$. Тогда из вида матрицы A можно заключить, что $\pi(j) = n + \pi_1(j)$, а $\pi(n+j) = \pi_2(j)$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$, где π_1, π_2 — произвольные перестановки на множестве n элементов. Подсчитаем знак перестановки через количество инверсий:

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(\pi) = (-1)^{\text{число инверсий } \pi} &= \\ = (-1)^{n^2}(-1)^{\text{число инверсий } \pi_1}(-1)^{\text{число инверсий } \pi_2} &= \\ &= (-1)^n \operatorname{sgn}(\pi_1)\operatorname{sgn}(\pi_2). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\operatorname{sgn}(\pi)A(\pi) = (-1)^n \operatorname{sgn}(\pi_1) M(\pi_1)(-1)^n \operatorname{sgn}(\pi_2) M(\pi_2),$$

так что

$$\det A = \sum_{\pi_1,\pi_2} \operatorname{sgn}(\pi_1) M(\pi_1)(-1)^n \operatorname{sgn}(\pi_2) M(\pi_2) = \det M \cdot \det M.$$

Решение 1.18. (Элементарнейшее.) Можно убедиться, что в формулу для детерминанта будут входить ровно два слагаемых, так что

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \lambda & 1 \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^n + (-1)^{n+1} \tag{9}$$

(Последний знак — это четность циклической перестановки $(12\dots)$). Проще всего это увидеть на рис. 5, где стрелки обозначают ненулевые элементы матрицы. Ненулевым слагаемым детерминанта отвечают такие множества ребер, что из каждой вершины выходит и в каждую вершину заходит ровно одно ребро (остовные наборы циклов). Теперь ясно, что если мы

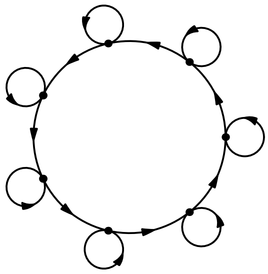

Рис. 5. Случай $n = 7$

включаем в такой набор любую петлю, то должны включить и соседние петли.

Матрица, которая получается заменой строк на столбцы и наоборот, называется транспонированной. В формулу для детерминанта транспонированной матрицы входят те же слагаемые, только перестановка заменяется на обратную. Поскольку четность перестановки совпадает с четностью обратной к ней, то детерминант транспонированной матрицы совпадает с детерминантом исходной. И вообще, почти во всех утверждениях про детерминанты есть симметрия относительно замены строк на столбцы. Далее мы приводим утверждения про строки, а пользоваться ими будем и для строк, и для столбцов.

4.1.1. Разложение по строке

Обозначим через $A \setminus (j;k)$ $(j;k)$-минор, т. е. матрицу, которая получается из A вычеркиванием j-й строки и k-го столбца (минор). Детерминант линеен по каждой переменной. Записывая его как линейную функцию от элементов первой строки, получаем

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}(-1)^{k+1} \det A \setminus (1;k). \tag{10}$$

Знак учитывает изменение четности перестановки при переходе к минору. Формула (10) дает индуктивный способ вычисления детерминанта, который так же плох с вычислительной точки зрения, как и определение (8). Но зато эту формулу удобно использовать в рассуждениях по индукции.

Аналогично можно разлагать по j-й строке, только вместо множителя $(-1)^{k+1}$ будет множитель $(-1)^{k+j}$.

Отметим важное следствие из формулы (10): если в матрице есть нулевая строка или нулевой столбец, то детерминант этой матрицы равен 0.

Решение 1.18. (Элементарное.) Разлагая по первой строке, получаем сумму двух детерминантов от треугольных матриц (ясно, что для детерминанта нижних треугольных матриц верна та же формула, что и для детерминанта верхних треугольных). Получаем в итоге

$$\det A = \lambda \cdot \lambda^{n-1} - (-1)^n \cdot 1.$$

Решение 1.20. Обозначим детерминант матрицы интересующего нас вида с n строками через P_n. Разлагая по первой строке, а затем — по первому столбцу, получаем $P_n = -P_{n-2}$. Первые члены в последовательности P_n легко вычислить непосредственно: $P_2 = -1$, $P_3 = 0$. Поэтому $P_{2n+1} = 0$, $P_{2n} = (-1)^n$.

4.1.2. Антисимметричность

Обозначим j-ю строку матрицы A через $\boldsymbol{a}_j$ и запишем детерминант как функцию от n строк:

$$\det A = \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n).$$

Строки можно почленно складывать и умножать на число. Относительно этих операций детерминант является линейной функцией. В частности, если умножить какую-нибудь строку на число, то и детерминант умножится на это число.

Лемма 5. *При перестановке двух строк детерминант меняет знак.*

Доказательство. Детерминант переставленной матрицы записывается почти в таком же виде, что и детерминант исходной. Нужно только умножить все перестановки на транспозицию, отвечающую переставляемым строкам. Это изменит знак. $\square$

Следствие 1. Если в матрице есть пара одинаковых строк, детерминант равен 0.

Следствие 2. Если добавить к строке другую строку, умноженную на некоторое число, то детерминант не изменится.

Решение 1.19. (Индуктивное.) Вычтем первую строку из остальных, потом — получившуюся вторую строку из остальных и т. д. Получаем цепочку равенств:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 \end{vmatrix} = \dots =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Решение 1.13. (Алгоритм Гаусса.) Алгоритм вычисления детерминанта использует сформулированные выше свойства. Дадим его краткое описание. Выберем ненулевой элемент матрицы и перестановкой строк и столбцов переместим его в первую строку и первый столбец (если нет ненулевого элемента, то определитель равен 0). Теперь добавляя первую строку с подходящим множителем к строкам 2, ..., n, сделаем элементы первого столбца в строках 2, ..., n равными 0. Повторим рекурсивно эту процедуру с минором, получающимся вычеркиванием первой строки и первого столбца. В итоге получим верхнетреугольную матрицу, детерминант которой с точностью до знака равен детерминанту исходной матрицы, Чтобы установить знак, нужно подсчитывать четность выполненных транспозиций строк и столбцов.

Замечание 2. Если вы решите запрограммировать алгоритм Гаусса и будете использовать числа фиксированной разрядности, вас может ожидать неприятный сюрприз. Все реальные вычисления проводятся по другим алгоритмам.

4.2. Произведение матриц

Матрицы можно почленно складывать и перемножать по следующему правилу:

$$(AB)_{jk} = \sum_{s=1}^{n} A_{js} B_{sk}. \tag{11}$$

Лемма 6. $\det(AB) = \det A \det B$.

Доказательство. Раскроем скобки и приведем подобные.

В правой части равенства (6) будут слагаемые вида

$$\operatorname{sgn}(\pi_1)\operatorname{sgn}(\pi_2) A(\pi_1) B(\pi_2),$$

ни одно из них не сокращается.

В левой части до приведения подобных будут слагаемые вида

$$S(\pi, f) = \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{j=1}^{n} A_{jf(j)} B_{f(j)\pi(j)},$$

где π — перестановка, а $f\colon [n] \to [n]$ — произвольная функция. Слагаемые, отвечающие тем f, которые не являются перестановками, сокращаются. Действительно, пусть $f(j) = f(m)$. Тогда $S(\pi, f) = -S(\pi \circ (jm), f)$. Если f — перестановка, обозначим $\pi_1 = f$, $\pi_2 = f^{-1} \circ \pi$. Тогда

$$S(\pi, f) = \operatorname{sgn}(\pi) A(\pi_1) B(\pi_2) = \operatorname{sgn}(\pi_1)\operatorname{sgn}(\pi_2) A(\pi_1) B(\pi_2).$$

Мы установили взаимно однозначное соответствие между слагаемыми в левой и правой частях формулы (6). ☐

Решение 1.19. (В одну строчку.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

4.3. Собственные числа и собственные векторы

Многочлен $\det(\lambda I - A)$ называется *характеристическим многочленом* матрицы A. Его степень равна n, так что у него (с учетом кратности) ровно n корней (комплексных). Они называются *собственными числами* матрицы A. Из теоремы Виета получаем, что детерминант — это произведение собственных чисел.

Правильнее говорить не о матрицах, а об операторах на векторном пространстве. Пример векторного пространства — матрицы размера $n \times 1$ (вектор-столбцы). В общем случае от векторного пространства требуется, чтобы его элементы можно было складывать и умножать на число так, чтобы выполнялись следующие свойства (латинскими буквами обозначаем векторы, а греческими — числа):

$$x + y = y + x; \quad x + (y + z) = (x + y) + z; \quad x + 0 = x; \quad (-x) + x = 0;$$
$$\lambda(x + y) = (\lambda x) + (\lambda y); \quad (\alpha + \beta)x = (\alpha x) + (\beta x); \quad \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x;$$
$$1 \cdot x = x.$$

Здесь 0 — выделенный вектор, $(-x)$ — вектор, противоположный x. Поскольку $0x = 0$, $(-1)x = -x$, используемые вольные обозначения не приводят к печальным следствиям.

Базис векторного пространства — такой набор векторов $e_1, \ldots, e_d, \ldots$, что любой другой вектор однозначно выражается в виде линейной комбинации

$$x = \sum_j \alpha_j e_j$$

(в этой сумме должно быть конечное число слагаемых). Пространство называется конечномерным, если у него есть конечный базис. Здесь мы всюду рассматриваем только конечномерные пространства, такие как пространство вектор-столбцов.

Условие однозначности разложения эквивалентно тому, что никакая нетривиальная (имеющая хотя бы один ненулевой коэффициент) линейная комбинация векторов не равна 0.

Теорема (о базисе). *Количество элементов в любом базисе одинаково.* Это число называется размерностью пространства.

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_d, f_1, \ldots, f_n$ и $e_1, \ldots, e_d, g_1, \ldots, g_m$ — два базиса. В разложении f_n по второму базису обязательно встретится один из векторов g_k (иначе первый набор не будет удовлетворять условию однозначности разложения). Без ограничения общности $f_n = \alpha g_m + a$. Но тогда $e_1, \ldots, e_d, g_1, \ldots, g_{m-1}, f_n$ — тоже базис. Таким образом, мы перешли к паре базисов, у которых на 1 больше общих векторов. Продолжая, приходим к паре $e_1, \ldots, e_{d+n}$ и $e_1, \ldots, e_{d+n}, g_1, \ldots$. Из однозначности разложения получаем, что базисы совпадают. □

(Линейный) оператор — такое отображение A векторного пространства, что $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$. Если зафиксировать базис $e_1, \ldots, e_d$, то действие оператора на вектор $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_de_d$ можно записать в виде

$$Ax = y = y_1e_1 + \cdots + y_de_d,$$
$$y = \sum_{k=1}^{d} x_kAe_k = \sum_{k=1}^{d} x_k \sum_{j=1}^{d} a_{jk}e_j,$$
$$y_j = \sum_{k=1}^{d} a_{jk}x_k.$$

Матрица (a_{jk}) называется матрицей оператора A в базисе $e_1, \ldots, e_d$. Оператор однозначно определяется базисом и матрицей в этом базисе.

Лемма 7. *Характеристические многочлены матриц оператора в любом базисе одинаковы.*

Доказательство. Обозначим матрицы оператора в базисе $\{e_j\}$ через $A = (a_{jk})$, а в базисе $\{f_j\}$ через $A' = (a'_{jk})$. Через $B = (b_{jk})$ обозначим матрицу перехода от e к f: $f_k = \sum_s b_{sk}e_s$. Матрица B обратима: если матрицу перехода от f к e обозначить через C, то

$$f_k = \sum_s b_{sk}e_s = \sum_{s,r} b_{sk}c_{rs}f_r, \quad \text{т.е. } CB = I, \quad C = B^{-1}.$$

Вычислим двумя способами Ae_k:

$$Ae_k = \sum_s a_{sk}e_s = \sum_{j,r} a_{sk}(b^{-1})_{rs}f_r,$$
$$Ae_k = A\big(\sum_s (b^{-1})_{sk}f_s\big) = \sum_s (b^{-1})_{sk}Af_s = \sum_{s,r} (b^{-1})_{sk}a'_{rs}f_r.$$

Другими словами, $A'B^{-1} = B^{-1}A$. Поэтому $A' = B^{-1}AB$.

Осталось использовать лемму 6:

$$\det(\lambda I - A') = \det(\lambda I - B^{-1}AB) = \det\big(B^{-1}(\lambda I - A)B\big) =$$
$$= \det B^{-1}\det(\lambda I - A)\det B = \det(A - \lambda I).$$

□

Оператор называется *диагонализуемым*, если в некотором базисе его матрица — диагональная. Другими словами это можно сказать так: у оператора есть базис из собственных векторов. *Собственный вектор* $x \neq 0$ удовлетворяет условию $Ax = \lambda x$ (λ — собственное число, соответствующее этому собственному вектору).

Лемма 8. $\det A = 0$ *тогда и только тогда, когда оператор A имеет собственный вектор с нулевым собственным числом. Другими словами последнее условие можно сформулировать так: существует $x \neq 0$, такое что $Ax = 0$.*

Доказательство. Условие $Ax = 0$ означает, что существует ненулевая комбинация столбцов A, равная 0. Но тогда один из столбцов A равен линейной комбинации остальных, поэтому $\det A = 0$.

Пусть для любого $x \neq 0$ выполнено $Ax \neq 0$. Выберем базис $e_1, \ldots, e_n$. Линейная оболочка (все линейные комбинации) векторов $Ae_1, \ldots, Ae_n$ совпадает с подпространством векторов вида Ax, которое мы обозначим $\operatorname{Im} A$. Если $Ae_1, \ldots, Ae_n$ не является базисом в $\operatorname{Im} A$, то нарушается условие однозначности разложения, откуда получится ненулевой вектор x, для которого $Ax = 0$. Значит, $Ae_1, \ldots, Ae_n$ — базис в $\operatorname{Im} A$. Аналогично теореме о базисе можно доказать, что базис любого подпространства продолжается до базиса всего пространства. Значит, L совпадает со всем пространством.

Таким образом, уравнение $y = Ax$ имеет решение для любого y. Это решение — единственное, поскольку из $y = Ax_1 = Ax_2$ следует $A(x_1 - x_2) = 0$. Поэтому определен обратный оператор A^{-1}. Но

$$\det I = \det(A^{-1}A) = \det A^{-1} \det A \neq 0.$$

Значит, $\det A \neq 0$, что и требовалось доказать. $\square$

Следствие 3. Для любого собственного числа найдется хотя бы один собственный вектор.

Решение 1.18. (Важное.) Рассмотрим оператор циклического сдвига, который можно задать матрицей

$$C_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

в базисе e_j, $j = 0, \ldots, n-1$. Прямым вычислением проверим, что вектор

$$x_k = \sum_{j=0}^{n-1} e^{2\pi jk/n} e_j$$

является собственным вектором для C_k:

$$C_n x_k = \sum_{j=0}^{n-1} e^{2\pi jk/n} C_n e_j = \sum_{j=0}^{n-1} e^{2\pi (j+1)k/n} e_j = e^{2\pi k} \sum_{j=0}^{n-1} e^{2\pi jk/n} C_n e_j = \lambda_k x_k.$$

Поэтому характеристический многочлен C_n равен $\prod_k (\lambda - \lambda_k) = \lambda^n - 1$. С точностью до $(-1)^n$ это совпадает с (9).

4.4. Симметричные и эрмитовы матрицы

Симметричная матрица не меняется при транспонировании. Родственное понятие — эрмитова матрица. Для эрмитовой матрицы H выполняются условия $H_{jk} = \bar{H}_{kj}$ (транспонирование и комплексное сопряжение).

Если матричные элементы — действительные, то понятия симметричной и эрмитовой матриц совпадают. Эрмитовы операторы тесно связаны со скалярным произведением, которое в случае вектор-столбцов задается следующей формулой

$$\langle x,y\rangle = \langle (x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\rangle = \sum_j \bar{x}_j y_j. \tag{12}$$

Здесь $\bar{z}$ — комплексно сопряженное число. Как видно из (12), скалярное произведение полуторалинейно. Отличие от линейности в том, что при умножении первого сомножителя на число λ скалярное произведение умножается на $\bar{\lambda}$.

Докажем прямым вычислением, что $\langle x,Hy\rangle = \overline{\langle y,Hx\rangle}$:

$$\overline{\langle y,Hx\rangle} = \sum_{j,k} \overline{\bar{y}_j H_{jk} x_k} = \sum_{j,k} y_j \bar{H}_{jk} \bar{x}_k = \sum_{j,k} \bar{x}_k H_{kj} y_j = \langle x,Hy\rangle.$$

Отсюда получаем, что скалярное произведение $\langle x,Hx\rangle$ — действительное число, поскольку $\overline{\langle x,Hx\rangle} = \langle x,Hx\rangle$. И обратно, если для любого x выполняется $\langle x,Hx\rangle = \overline{\langle x,Hx\rangle}$, т. е.

$$\sum_{j,k} \bar{x}_j H_{jk} x_k = \sum_{j,k} \bar{x}_j \bar{H}_{kj} x_k,$$

то легко понять, что $H_{jk} = \bar{H}_{kj}$. Это показывает, что эрмитовость — свойство не матрицы, а оператора (не зависит от выбора базиса).

Эрмитовы операторы диагонализуемы.

Теорема. *Для любого эрмитова оператора есть ортогональный базис из собственных векторов, а собственные числа — всегда действительные.*

Вот короткий набросок доказательства этой теоремы. Пусть $Hx = \lambda x$, тогда $\langle x,Hx\rangle = \lambda\langle x,x\rangle$, значит λ — действительное. Собственные вектора, соответствующие различным собственным числам, ортогональны: если $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и $Hx_k = \lambda_k x_k$, то

$$\lambda_1\langle x_2,x_1\rangle = \langle x_2,Hx_1\rangle = \overline{\langle x_1,Hx_2\rangle} = \lambda_2\overline{\langle x_1,x_2\rangle} = \lambda_2\langle x_2,x_1\rangle,$$

значит $\langle x_2,x_1\rangle = 0$.

Пусть V_λ — подпространство собственных векторов с собственным значением λ. Ортогональное дополнение $V_\lambda^\perp$ — множество векторов, ортогональных всем векторам из V_λ. Любой вектор x однозначно представляется в виде суммы $x_1 + x_2$, где $x_1 \in V_\lambda$, $x_2 \in V_\lambda^\perp$ — ортогональные проекции x на соответствующие подпространства. По определению, ортогональная проекция вектора x на подпространство L — это такой вектор $\ell \in L$, что для любого $\ell' \in L$ выполняется $\langle x,\ell'\rangle = \langle \ell,\ell'\rangle$. Почему ортогональная проекция существует и единственна? Заметим, что $\langle x,\cdot\rangle$ — линейный функционал на пространстве L. Линейные функционалы очевидным образом можно складывать и умножать на число, поэтому они образуют векторное пространство. Размерность этого пространства совпадает с размерностью пространства L, а базисом являются функционалы, задающие умножение на вектора из некоторого базиса L. Значит, $\langle x, \cdot\rangle$ однозначно записывается в виде $\langle \ell, \cdot\rangle$, $\ell \in L$. Рутинным образом проверяется, что сумма ортогональных проекций x на взаимно ортогональные пространства равна x и что это представление единственно.

Пространство $V_\lambda^\perp$ инвариантное для оператора H, т.е. для любого $x \in V_\lambda^\perp$ выполняется $Hx \in V_\lambda^\perp$:

$$\langle v, Hx\rangle = \overline{\langle x, Hv\rangle} = \bar\lambda\langle v, x\rangle = 0.$$

Поэтому завершить доказательство теоремы можно индукцией по размерности, выделяя собственное подпространство и применяя к его ортогональному дополнению предположение индукции.

Решение 1.21. Обозначим симметричную матрицу из задачи через K_n. Прямым вычислением проверяется равенство $K_n^2 = (n-2)K_n + (n-1)I$. Это значит, что любое собственное число удовлетворяет уравнению $\lambda^2 - (n-2)\lambda - (n-1) = 0$, у которого два корня: -1 и $n-1$. Собственный вектор, отвечающий второму числу, угадывается моментально: это вектор $(1, 1, \dots, 1)$ (для простоты записи мы пишем столбец в строчку). Ортогональное дополнение к этому вектору состоит из векторов $x = (x_1, \dots, x_n)$, удовлетворяющих условию

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0.$$

Но тогда $(K_n x)_k$ равно сумме всех x_j, кроме x_k, т.е. равно $-x_k$.

Итак, есть одно собственное число $n-1$ и $n-1$ собственных чисел -1. Детерминант равен их произведению, т.е. $(-1)^{n-1}(n-1)$.

4.5. Тензорное произведение

Векторные пространства можно (тензорно) перемножать. Пусть L, M — два векторных пространства. Неформально говоря, векторы из тензорного произведения $L \otimes M$ являются линейными комбинациями *разложимых* векторов вида $x \otimes y$, $x \in L$, $y \in M$. Более точно, структура тензорного произведения — это пространство $L \otimes M$ и *билинейное* отображение $\otimes\colon L \times M \to L \otimes M$, удовлетворяющие *условию универсальности*: для любого билинейного отображения $\varphi\colon L \times M \to F$ существует единственное отображение $\alpha\colon L \otimes M \to F$, которое удовлетвряет условию $\varphi = \alpha \circ \otimes$.

Если $\{e_j\}$ — базис в L, а $\{f_k\}$ — базис в M, то $L \otimes M$ можно описать конструктивно как множество формальных линейных комбинаций

$$\sum_{j,k} x_{jk} e_j \otimes f_k.$$

Требуемое в определении билинейное отображение задается очевидным образом:

$$\otimes\left(\sum_j a_j e_j, \sum_k b_k f_k\right) = \sum_{jk} a_j b_k (e_j \otimes f_k). \tag{13}$$

Свойство универсальности следует из того, что на базисных векторах $e_j \otimes f_k$ отображение α определено однозначно: $\alpha(e_j \otimes f_k) = \varphi(e_j, f_k)$, на остальные вектора оно продолжается по линейности.

Из конструктивного определения тензорного произведения ясно, что размерность тензорного произведения равна произведению размерностей сомножителей.

Теперь используем сказанные выше абстрактные слова для вывода нескольких конкретных следствий.

Докажем, что любое множество вида $\{g_j \otimes h_k\}$, где g_j — базис в L, h_k — базис в M, является базисом в $L \otimes M$. Для этого подставим в свойство универсальности вместо F пространство линейных комбинаций $\{g_j \otimes h_k\}$ вместе с очевидным φ. Тогда α из свойства универсальности является отображением «на». С другой стороны, размерности пространств совпадают по построению. Значит, имеется обратное отображение, которое переводит базис в базис.

Рассмотрим два оператора $A\colon L \to L$, $B\colon M \to M$ и билинейное отображение $(A \otimes B)\colon (u, v) \mapsto (Au) \otimes (Bv)$ в $L \otimes M$. Отображение α из свойства универсальности определяет оператор $A \otimes B\colon L \otimes M \to L \otimes M$, который называется тензорным произведением A и B.

В случае диагонализуемых операторов A, B очевидно, что собственные числа $A \otimes B$ — произведения собственных чисел A и B. На самом деле это верно всегда.

Решение 1.22. Матрица H_n является n-й тензорной степенью матрицы $H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, собственные числа которой равны $\pm\sqrt{2}$. Поэтому собственные числа H_n равны $\pm 2^{n/2}$, причем положительных и отрицательных поровну. Поэтому $\det H_n = 2^{2^{n-1}n}$ при $n > 1$.