1 Классическая гиперболическая геометрия

1.1 Немного истории и математической логики

Прежде, чем давать определение гиперболической группы или гиперболического пространства, мы разберёмся в началах классической гиперболической геометрии.

Для начала мы — вернёмся в III в. до нашей эры, во времена Евклида, к его «Элементам». В этом революционном труде Евклид впервые, вместо того, чтобы приводить более или менее убедительные рассуждения, разделил все утверждения на два класса. Одни утверждения — аксиомы, принимаемые без доказательства, и другие — теоремы, строго выводимые из аксиом.

Тем не менее, одна из аксиом — пятый постулат — оказалась менее очевидной, чем остальные. И это на долгое время стало вызовом геометрам — переформулировать её так, чтобы она оказалась более очевидной, либо же вообще доказать её как следствие остальных аксиом.

Первое, скорее, получалось, но вот второе — нет. А как можно было бы выводить пятый постулат из остальных аксиом? Разумеется, от противного! Предположить его отрицание, добавить к остальным аксиомам, и понавыводить как можно больше всего, чтобы в конце концов придти к противоречию. Но — выяснялось, что выводится много разных интересных утверждений, а вот противоречия всё не получается и не получается.

И, наконец, в середине-конце XIX века было доказано, что пятый постулат вывести из остальных аксиом нельзя. Иными словами, что такая система аксиом непротиворечива.

А как вообще, в принципе, можно такое утверждение доказать? Как можно доказать, что система аксиом непротиворечива? И как, кстати, можно доказать, что непротиворечива система аксиом Евклида — с пятым постулатом?

Ответом является замечательное понятие математической логики, *модель*. А именно: в системе аксиом Евклида, собственно говоря, неважно, что на самом деле такое точка, а что прямая. Представим себе, что у нас есть множество слонов — которые мы будем рассматривать как точки, и крокодилов — прямых. Что мы умеем сопоставить крокодила двум слонам («прямая, проходящая через заданные две точки»), измерить угол между двумя крокодилами в слоне их пересечения, и так далее. Если при всём этом для таких множеств и сопоставлений выполняются все аксиомы — мы получили модель геометрии. И существование модели автоматически делает систему аксиом непротиворечивой.

Именно таким образом Декарт показал непротиворечивость обычной геометрии: записав всё в координатах. А именно: пусть точка в координатной модели — это просто пара координат, (x, y), прямая — это её уравнение $ax + by = c$ (с точностью до пропорциональности), и так далее. Проверив аксиомы для такой модели, он *вывел* непротиворечивость аксиом Евклида из непротиворечивости вещественных чисел. Ну, а если аксиомы вещественных чисел противоречивы, то и говорить как-то особо не о чем...

Итак, мы собираемся предъявить модель гиперболической геометрии — геометрии Лобачевского. Собственно говоря, не совсем очевидно, почему о гиперболической геометрии нужно говорить «с определённым артиклем» — почему она одна (ведь без пятого постулата геометрий как минимум две, может быть, и здесь всё ещё есть утверждения, *независимые* от новой системы аксиом, — такие, которые нельзя ни доказать, ни опровергнуть?). Но мы оставим этот вопрос «за кадром» — и перейдём к построению модели гиперболической геометрии, а именно, модели Пуанкаре.

1.2 Модели Пуанкаре

Опять-таки, модель (а, точнее, сразу две модели!) мы начнём строить не сразу, а предварительно задавшись ещё одним вопросом. А именно, — «что же такое геометрия»? Что мы будем описывать?

Для нас, в геометрию будут входить точки, прямые, расстояния между точками, углы между прямыми, и (!) движения в этой геометрии. (Собственно, стоит отметить, что Клейн в своей «Эрлангенской программе» ставил движения на первое место в этом списке!)

Итак, первая из моделей — *модель Пуанкаре в диске*, в которой:

- *Точки* — точки единичного диска $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.
- *Прямые* — диаметры D и дуги окружностей, перпендикулярных граничной окружности $\{|z| = 1\}$; эта последняя называется *абсолютом.*
- *Угол между прямыми* определяется как обычный евклидов угол между двумя окружностями.

Очевидно (см. рис), что в этой модели пятый постулат не выполняется.

Однако, нам осталось ещё определить расстояния между точками и движения. Расстояния мы определим позднее, а пока зададим группу движений, сохраняющих ориентацию. А именно, в качестве таких отображений мы возьмём *дробно-линейные отображения*, то есть отображения вида $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, с условием, что такое отображение сохраняет D. Собственно, такие отображения в гиперболической геометрии (и не только!) нужны очень часто, поэтому нам будет полезно сразу оговорить, на каком множестве они на самом деле определены, и какие у них свойства.

Определение 1. *Сферой Римана* называется комплексная плоскость, к которой добавлена бесконечно удалённая точка:

$$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{C}P^1.$$

Определение 2. *Дробно-линейным преобразованием* сферы Римана называется отображение $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, имеющее вид

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \text{где } a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0.$$

Задача 1. Уточните определение 2, указав, куда должны переходить бесконечно удалённая точка и (при $c \neq 0$) точка $z = -d/c$.

Что происходит при $ad - bc = 0$?

Задача 2. *i)* Проверьте, что все дробно-линейные преобразования обратимы, и найдите явно обратные отображения.

ii) Композиция дробно-линейных преобразований дробно-линейна.

iii) Всякое дробно-линейное преобразование есть композиция отображений вида $z + a$, cz и $1/z$.

Определение 3. *Двойным отношением* четырёх точек x, y, z, w на сфере Римана (из которых не более двух совпадающих) называется число

$$[x, y, z, w] = \frac{x-y}{x-z} : \frac{w-y}{w-z}.$$

Задача 3. Проверьте, что двойное отношение четырёх точек не меняется при дробно-линейных преобразованиях: если f — дробно-линейное, то

$$[x, y, z, w] = [f(x), f(y), f(z), f(w)].$$

Указание. *Воспользуйтесь задачей 2.iii).*

Итак, мы решили в качестве движений, сохраняющих ориентацию, рассматривать дробно-линейные преобразования, сохраняющие диск D на месте. Отметим, что первое, что нам следует проверить — что такие отображения действительно переводят прямые модели Пуанкаре в прямые, и сохраняют углы (в смысле модели) между ними. Это действительно так. Проверим эти свойства — разбив эту проверку на несколько задач.

Определение 4. *(Обобщённой) окружностью* на сфере Римана называется множество точек, являющееся либо (обычной) окружностью на комплексной плоскости, либо прямой, к которой добавлена бесконечно удалённая точка.

Задача 4. Двойное отношение четырёх точек вещественно тогда и только тогда, когда эти точки лежат на одной обобщённой окружности.

Указание. *Вспомните школьную геометрию!*

Задача 5. Дробно-линейные преобразования переводят обобщённые окружности в обобщённые окружности.

Как несложно видеть, в таком определении, прямая в модели Пуанкаре — это дуга обобщённой окружности, перпендикулярная абсолюту. И в силу задачи 5, при дробно-линейном преобразовании образом прямой в модели Пуанкаре будет обобщённая окружность. Осталось разобраться, почему она тоже будет перпендикулярна абсолюту, и почему углы между прямыми сохраняются при движениях.

Оказывается, и то, и другое — свойство *конформности* дробно-линейных, как и вообще комплексно-дифференцируемых, преобразований. А именно:

Определение 5. Пусть две гладкие кривые пересекаются в точке P. Углом (в этой точке) между ними называется угол между касательными к ним в этой точке.

Определение 6. Отображение $f : U_1 \to U_2$, где U_1, U_2 — области в $\mathbb{R}^n$, называется *конформным*, если оно сохраняет углы между кривыми.

Посмотрим теперь на самые простые отображения:

Задача 6. Пусть $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Докажите, что отображение умножения на a,

$$M_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad M_a : z \mapsto az,$$

является композицией поворота и гомотетии и потому сохраняет углы между векторами.

Определение 7. Отображение $f : U \to \mathbb{C}$, где U — область в $\mathbb{C}$, называется *комплексно-дифференцируемым* в точке $z_0 \in U$, если существует предел

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

который в этом случае называется *производной* f *в точке* z_0 и обозначается $f'(z_0)$.

Это определение можно дать иначе — сказав, что линейная часть отображения f есть умножение на $f'(z_0)$.

Пусть теперь f — комплексно-дифференцируемое в некоторой точке z_0 отображение, и его производная в этой точке не равна нулю. Тогда линейная часть f будет сохранять угол между векторами. С другой стороны, если в этой точке пересекаются две кривые, касательные к их образом будет определять именно применение линейной части! Поэтому, *комплексно-дифференцируемое отображение конформно в тех точках, где его производная не обращается в ноль.*

Задача 7. Докажите, что дробно-линейные отображения комплексно-дифференцируемы во всех точках области определения, и что производная любого из них не обращается в ноль.

Итак, мы более-менее разобрались с моделью в диске, описав для неё точки, прямые, углы, и сохраняющие ориентацию движения. Отметим, кстати, что хотя точки абсолюта не являются точками самой модели, их рассмотрение зачастую оказывается очень удобным!

Модель в круге очень удобна своей центральной симметрией; однако, к примеру, в ней не сразу очевидно, как перевести заданную точку в заданную точку. Поэтому, одновременно с ней мы рассмотрим *модель Пуанкаре в верхней полуплоскости*, в которой:

- *Точки* — точки верхней полуплоскости $\Pi_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$.
- *Прямые* — вертикальные прямые и дуги окружностей, диаметр которых лежит на граничной прямой $\mathbb{R}$, иными словами, перпендикулярные граничной кривой обобщённые окружности; эта последняя называется *абсолютом* (для этой модели).
- *Угол между прямыми* определяется как обычный евклидов угол между двумя (обобщёнными) окружностями.
- *Движениями, сохраняющими ориентацию,* будут дробно-линейные преобразования, сохраняющие верхнюю полуплоскость.

Отметим, что в этом случае, условие сохранения области проверить чуть проще, чем в случае модели в диске:

Задача 8. Дробно-линейное преобразование сохраняет Π_+ тогда и только тогда, когда оно представляется в виде

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}, \quad ad-bc > 0.$$

В этом случае комплексно-сопряжённые точки переходят в комплексно-сопряжённые.

Естественно, что имея эти две модели, мы хотели бы проверить их эквивалентность. Для этого достаточно найти дробно-линейное отображение, переводящее верхнюю полуплоскость в единичный диск:

Задача 9. Докажите, что отображение $\frac{z-i}{z+i}$ переводит Π_+ в D.

Применяя это отображение к точкам и прямым, и сопрягая им движения, мы видим, что модели действительно эквивалентны — одна из них это другая, на которую мы смотрим «сквозь призму» замены координат.

Нам остаётся сделать ещё две вещи. Во-первых, нам стоит разобраться с движениями: а достаточно ли их? Действительно ли они позволяют перевести любую точку модели в любую другую, и, более того, повернуть при этом луч, выходящий из одной точки, в луч, выходящий из другой? И во-вторых, мы должны ввести согласованное с движениями расстояние.

Первое мы можем сделать немедленно, а вот вторым займёмся в следующем параграфе.

Для начала научимся просто переводить любую точку модели в любую другую. Это очевидно для модели в верхней полуплоскости: в этом случае, чтобы перевести точку i в точку $a+ib$, можно взять преобразование $z \mapsto a+bz = \frac{a+bz}{1+0z}$. А, чтобы перевести одну точку в другую, достаточно взять композиционное частное таких отображений.

Задача 10. Сделайте то же самое для модели в диске.
Указание. *Воспользуйтесь задачей 8.*

Итак, мы научились переводить любую точку модели в любую другую, но мы хотели бы ещё при этом переводить луч (т. е. полупрямую), исходящий из первой точки, в луч, исходящий из второй — точно так же, как это позволяют делать движения обычной евклидовой плоскости.

На этот раз, мы воспользуемся моделью в диске. Это утверждение очевидно, если и начальная, и конечная точки — центр диска 0: тогда достаточно применить поворот диска на соответствующий угол. Но мы уже знаем, что любая точка диска переводится движением в 0. Переводя начальную и конечную точку в 0 и «доворачивая» композицию посередине, мы и получаем требуемое утверждение.

Задача 11. Докажите то же утверждение для верхней полуплоскости.

Отметим, кстати, что такое совмещение — как и в евклидовом случае — единственно. Действительно, установим это сначала для точки 0. Несложно проверить, что имеет место следующее утверждение:

Задача 12. Дробно-линейное преобразование, сохраняющее единичный диск $D = \{z : |z| < 1\}$ и переводящее точку 0 в себя, имеет вид $z \to \lambda z$, где $|\lambda| = 1$.
Указание. *Модуль образа точки z с $|z| = 1$ должен равняться 1: граница переходит в границу.*

Поэтому для точки 0 луч в луч переводится единственным способом: иначе композиционное частное было бы поворотом на ненулевой угол, оставляющим, тем не менее, какой-то луч из 0 на месте. А, поскольку любая точка в точку 0 переводится, это верно и для любой другой точки плоскости Лобачевского.

Также, отсюда видно, что группа движений плоскости Лобачевского трёхмерна: движение однозначно восстанавливается по образу точки и образу направления в этой точке, что даёт $2 + 1 = 3$ параметра. Это можно было увидеть и из задачи 8: движение в верхней полуплоскости задаётся 4 вещественными числами с точностью до пропорциональности, итого $4 - 1 = 3$ степени свободы.

1.3 Расстояния, площади и окружности на плоскости Лобачевского

Расстояния на плоскости Лобачевского можно определять одним из двух способов. Вот первый из них:

Определение 8. *Расстояние на плоскости Лобачевского* между точками x и y определяется как

$$\rho_{hyp}(x, y) = |\ln[a, x, y, b]|, \tag{1}$$

где точки a и b это точки на абсолюте у прямой плоскости Лобачевского, проходящей через точки x и y.

Задача 13. Введённое выше расстояние на плоскости Лобачевского корректно (под логарифмом стоит вещественное положительное число), симметрично и инвариантно относительно определённых выше движений.

При таком введении сразу получается инвариантность расстояний — так что наши «движения» действительно оказываются движениями для этой метрики. Правда, при таком определении расстояния придётся проверять неравенство треугольника. Поэтому мы предпочтём другой способ ввести метрику, дающий лучшее интуитивное понимание устройства геометрии Лобачевского.

Это определение через длины векторов, позволяющее, более того, определять длины любых гладких кривых — и именно ему и будут посвящены несколько следующих задач. Однако, в отличие от евклидова случая, длина вектора будет зависеть от точки приложения — поэтому нам придётся дать следующее определение:

Определение 9. *Касательным расслоением* к модели в диске (в полуплоскости) называется множество пар “точка, вектор” — то есть $D \times \mathbb{C}$ (соответственно, $\Pi_+ \times \mathbb{C}$). Движение f действует на касательном пространстве, переводя вектор v, приложенный в точке x, в вектор $df|_x v = f'(x)v$, приложенный в точке $f(x)$.

Зададим теперь длины векторов:

Определение 10. *i) Гиперболической длиной* вектора v, приложенного в точке $a \in D$, назовём удвоенную (из соображений нормировки — см. ниже) евклидову длину его образа под действием отображения, переводящего a в $0 \in D$:

$$\|v\|_{hyp} = 2\big|df|_a(v)\big|_{eucl} = 2|v|_{eucl} \cdot |f'(a)|. \tag{2}$$

Гиперболической длиной вектора v, приложенного в точке $a \in \Pi_+$, назовём евклидову длину его образа под действием отображения, переводящего a в $i \in \Pi_+$:

$$\|v\|_{hyp} = \big|df|_a(v)\big|_{eucl} = |v|_{eucl} \cdot |f'(a)|. \tag{3}$$

Коэффициент $2|f'(a)|$ (соотв., $|f'(a)|$) в этих случаях мы будем называть *конформным коэффициентом.* Мы его будем дальше обозначать $K_{hyp}(a)$.

Задача 14. *i)* Пусть $a \in D$. Тогда для любых двух движений, переводящих a в 0, модули их производных в точке a совпадают.

Указание. *Рассмотрите композиционное частное этих отображений, и воспользуйтесь задачей 12.*

ii) Первая часть определения 10 корректна.

iii) Гиперболические длины векторов сохраняются под действием движений плоскости Лобачевского.

iv) Найдите производную в 0 дробно-линейного отображения, переводящего D в Π_+ и отображающего 0 в i.

v) Проверьте согласованность первой и второй частей определения 10 и корректность второй части.

Как видно из последней задачи, выбирая длины векторов, мы на самом деле выбрали длину совпадающей с евклидовой в одной точке (в точке $0 \in D$), а потом «разнесли» этот способ выбора длины нашими движениями в остальные точки, так, чтобы получилась инвариантная относительно движений величина.

Займёмся теперь длинами кривых. Вообще, если для какого-нибудь многообразия (разумным образом) заданы длины касательных векторов, то говорят, что на этом многообразии задана *риманова метрика.* Тогда очень естественно определить длину кривой, запараметризовав её («пробежав» её точкой) и подсчитав интеграл по времени от длины вектора скорости:

Определение 11. Пусть задана кривая $\gamma : [0, T] \to D$ (или $\gamma : [0, T] \to \Pi_+$) в плоскости Лобачевского. Определим её *(гиперболическую) длину* как интеграл от гиперболической длины вектора скорости $\dot{\gamma}$:

$$l_{hyp}(\gamma) = \int_0^T \|\dot{\gamma}(t)\|_{hyp}\, dt.$$

Задача 15. *i*) Так определённая длина кривой не зависит от выбора параметризации.

ii) Гиперболическая длина задаётся как

$$l_{hyp}(\gamma) = \int_\gamma K_{hyp}(a)\, dl_{eucl},$$

где интеграл берётся по стандартной евклидовой длине.

Задача 16. Определённая нами длина кривой инвариантна относительно движений плоскости Лобачевского.

Найдём теперь явный вид нашей метрики. Проще всего это сделать в верхней полуплоскости: там проще всего перевести произвольную точку в заданную. А именно, отображение $z \mapsto \frac{z-x}{y}$ переводит точку $x+iy$ в точку i, и его производная в этой точке равна $\frac{1}{y}$, поэтому $K_{hyp}(x+iy) = \frac{1}{y}$.

Задача 17. Найдите соответствующий конформный множитель K_{hyp} для модели в диске.
Ответ. $K_{hyp}(a) = \frac{2}{1-|a|^2}$.

Обычно в дифференциальной геометрии задают длину вектора значением квадратичной формы на нём, поэтому ответы в двух предыдущих задачах чаще всего записываются в виде $\boxed{ds^2_{\Pi_+} = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}}$ и $\boxed{ds^2_D = 4\frac{dx^2+dy^2}{(1-x^2-y^2)^2}}$.

Научившись определять длины кривых, мы (опять-таки следуя общему подходу) можем определить расстояния между точками, а заодно удостовериться, что прямые это действительно кратчайшие пути (в общей ситуации они называются *геодезические*).

Определение 12. Расстояние между точками a и b это инфимум длин кривых, их соединяющих.

Разберёмся для начала с простым случаем: рассмотрим точки i и $y_0 i$ в верхней полуплоскости, и пусть $y_0 > 1$. Гиперболическая длина вертикального отрезка между ними равна

$$\int_1^{y_0} \frac{dy}{y} = \ln y_0. \tag{4}$$

С другой стороны, любой другой путь можно спроецировать на вертикальную прямую вдоль горизонтальной, и его гиперболическая длина при этом только уменьшится (поскольку уменьшится евклидова длина вектора скорости, а y-координата, и, значит, и множитель $\frac{1}{y}$ останется тем же). Итак, вертикальные прямые это действительно геодезические.

Осталось сделать то же самое для любых точек плоскости Лобачевского.

Задача 18. *i)* Отрезок (гиперболической) прямой от точки a до точки b это кратчайший путь между этими двумя точками.

Указание. *Воспользуйтесь инвариантностью и задачей 11.*

ii) То же верно и в диске.

iii) Расстояния, заданные явно определением 8 и через риманову метрику определением 12, совпадают.

Указание. *Проверьте согласованность формул* (1) *и* (4).

Итак, мы получили описание расстояний в геометрии Лобачевского. В частности, чем ближе к абсолюту, тем на бóльшую константу начинают умножаться длины векторов, и соответственно тем больше там становится отношение гиперболической и евклидовой длин.

Поработаем теперь немного с другими геометрическими понятиями.

Определение 13. *Окружностью в геометрии Лобачевского* называется множество точек, удалённых от данной на данное (гиперболическое) расстояние $R > 0$.

Определение 14. *Гиперболической площадью* области U называется интеграл

$$S_{hyp}(U) = \iint_U K_{hyp}^2(a)\, dS_{eucl}(a).$$

Задача 19. *i*) Докажите, что окружность в моделях Пуанкаре (в D и в Π_+) *изображается* настоящей (обобщённой) окружностью.

Указание. *Воспользуйтесь инвариантностью и попытайтесь найти точку и модель, для которой это было бы очевидно.*

ii) Правда ли, что евклидов центр такой окружности всегда совпадает с гиперболическим?

Задача 20. Найдите длину и площадь окружности радиуса R. Как они себя ведут при $R \to \infty$?

Задача 21 (Изопериметрическое неравенство)**.** Приняв на веру, что на плоскости Лобачевского окружность ограничивает наибольшую площадь при заданной длине, докажите, что для некоторой константы $C > 0$ кривая любой длины l ограничивает площадь, не превосходящую Cl.

Мы закончим этот параграф, убедившись в справедливости следующего, на первый взгляд, неправдоподобного, утверждения: *радиусы вписанных окружностей для треугольников на плоскости Лобачевского равномерно ограничены сверху.*

Как мы уже не раз делали, сделаем сначала отступление в сторону, решив другой — но, как сейчас выяснится, связанный с нашим — вопрос. А именно, мы уже умеем переводить одну точку модели в другую, более того, умеем при этом совмещать направление с направлением. Однако, иногда нам будет гораздо удобнее переводить друг в друга точки на абсолюте, а не в самой модели.

А для какого количества точек на абсолюте мы сможем перевести любой один их набор в любой другой? Поскольку абсолют имеет размерность 1, условие, что данная точка перешла в данную точку, «съедает» одну степень свободы, поэтому логично ожидать, что мы сможем перевести набор из трёх точек в (более-менее) любой другой.

Оказывается, что так оно и есть, с тем лишь очевидным дополнительным условием, что циклический порядок на окружности у трёх точек-прообразов должен быть таким же, как у трёх точек-образов. А именно, докажем сначала следующий, очень нужный и полезный сам по себе, факт: *дробно-линейное преобразование сферы Римана позволяет перевести любую тройку различных точек в любую другую.*

Задача 22. *i*) Двойное отношение четырёх точек $[z, a, b, c]$, рассматриваемое как функция лишь первого аргумента z, есть дробно-линейное преобразование, переводящее a в 0, b в ∞ и c в 1.

ii) Для любых двух троек (a, b, c) и (a', b', c') различных точек на сфере Римана существует единственное дробно-линейное преобразование f, переводящее a в a', b в b' и c в c'.

Указание. *Это преобразование задаётся уравнением*

$$[z, a, b, c] = [f(z), a', b', c'].$$

Теперь пусть как точки (a, b, c), так и точки (a', b', c') лежат на единичной окружности — абсолюте модели в диске. Тогда дробно-линейное отображение, переводящее первую тройку во вторую, сохраняет абсолют: как мы уже знаем, дробно-линейные отображения переводят обобщённые окружности в обобщённые окружности, а через три точки (a', b', c') проходит ровно одна обобщённая окружность. Наконец, из того, что (a, b, c) и (a', b', c') идут в одном и том же циклическом порядке, следует, что внутренность переходит именно во внутренность — то есть, что получается движение модели в круге.

Вернёмся теперь ко вписанным окружностям. Для начала, сделаем два несложных замечания:

Задача 23. *i*) Вписанная в треугольник окружность это окружность наибольшего радиуса, содержащаяся внутри этого треугольника.

ii) Если один треугольник содержится в другом, то радиус вписанной окружности для большего треугольника больше.

Возьмём теперь произвольный треугольник на плоскости Лобачевского, и будем уносить одну из его вершин всё дальше и дальше, пока она не уйдёт на бесконечность — см. рис.. То, что получилось, уже не обычный треугольник — одна из его вершин лежит на абсолюте — но окружность в него вписать всё ещё можно. Точно так же поступим с двумя другими вершинами. В результате мы получим «абсолютный треугольник», все три вершины которого лежат на абсолюте. При этом, из задачи 23 (если быть совсем честными — из её модификации для вершин на абсолюте) мы знаем, что радиус его вписанной окружности оценивает сверху радиус вписанной окружности для исходного треугольника.

Но «абсолютный» треугольник, с точностью до движения, единственен: мы ведь уже знаем, что любую тройку точек на абсолюте можно перевести в любую другую! Значит, радиус вписанной в него окружности ни от чего не зависит, и он и будет оценкой сверху на радиус вписанной окружности для любого треугольника плоскости Лобачевского.

Задача 24. Найдите радиус вписанной окружности для абсолютного треугольника.

1.4 Модель в гиперболоиде, модель Клейна и стереографическая проекция

В принципе, мы уже выяснили все свойства геометрии Лобачевского, которые нам понадобятся для дальнейшего. Однако, наш рассказ о ней был бы неполон без упоминания ещё двух моделей: модели Клейна в диске и модели в гиперболоиде.

В *модели Клейна*, *точками* являются точки единичного диска D, который мы, правда, на этот раз считаем подмножеством $\mathbb{R}^2$, а не $\mathbb{C}$. *Прямые* в этой модели — отрезки пересекающих этот диск евклидовых прямых, а *движениями* модели являются проективные преобразования плоскости, сохраняющие диск D на месте. Наконец, расстояния определяются аналогичной (1) формулой:

$$\rho_{Klein}(x, y) = \frac{1}{2}|\ln[a, x, y, b]|,$$

где точки a и b это граничные точки отрезка — прямой, проходящей через точки x и y. (Поскольку эти четыре точки лежат на одной прямой, их двойное отношение корректно определено.)

Мы не будем определять углы в этой модели — скажем только, что они *отличаются* от евклидовых, что делает эту модель довольно неудобной.

Задача 25. Проверьте, что расстояния в модели Клейна действительно инвариантны относительно заявленной группы движений, и что в этой модели не выполняется пятый постулат.

Для *модели в гиперболоиде* мы рассмотрим трёхмерное пространство $\mathbb{R}^3$, на котором задана квадратичная форма сигнатуры (2,1), и соответствующее ей «скалярное произведение»:

$$Q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2, \quad \langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 - z_1 z_2.$$

Такое пространство — с квадратичной формой «с одним минусом» (вместо всех плюсов для квадратичной формы, задающей евклидову метрику) — называют *лоренцевым*, а чтобы подчернуть выбор формы, обозначают его $\mathbb{R}^{2,1}$. (Отступая в сторону, скажем, что в теории относительности пространство-время — четырёхмерно лоренцево пространство $\mathbb{R}^{1,3}$ с формой $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$.)

Конечно, поскольку форма Q принимает и положительные, и отрицательные значения, метрику на $\mathbb{R}^{2,1}$ с её помощью задать нельзя. Однако, рассмотрим «сферу» (точнее, псевдосферу) с квадратом радиуса (-1):

$$\{Q(x, y, z) = -1\} = \{(x, y, z) \mid z^2 = x^2 + y^2 + 1\}.$$

Это — двуполостный гиперболоид, и мы рассмотрим его «верхнюю чашку»

$$H = \{(x, y, z) \mid Q(x, y, z) = -1, \ z > 0\}.$$

Её точки и будут *точками* модели, а *прямыми* — сечения H плоскостями, проходящими через начало координат. Зададим теперь расстояние — как и в случае модели Пуанкаре, задав на нём риманову метрику.

А именно, нам нужно задать длины векторов скоростей для точек, движущихся по гиперболоиду — то есть, для векторов, касательных к гиперболоиду. Гиперболоид — это поверхность уровня функции Q, поэтому касательная плоскость к ней в точке $p = (x_0, y_0, z_0)$ задаётся условием

$$T_p H = \{v \mid dQ|_p(v) = 0\}.$$

Но $dQ|_p(v) = 2\langle p, v \rangle$, поэтому касательные вектора — это просто ортогональные (в смысле заданного скалярного произведения) к p вектора.

А как устроено ограничение формы Q на касательную плоскость $T_p H$? Оказывается, что форма Q на любой такой плоскости положительно определена. Действительно, выберем базис (v_1, v_2) этой плоскости, и посмотрим, как в базисе (p, v_1, v_2) выглядит форма Q:

$$Q \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

Мы видим, в частности, что сигнатура («число плюсов и минусов») у формы Q есть сумма сигнатуры ограничения на плоскость и сигнатуры (0,1), отвечающей вектору p. Поэтому для плоскости остаётся как раз сигнатура (2,0) — то есть, положительная определённость.

Определим теперь длину касательного вектора v как

$$\|v\|_{hyp} := \sqrt{Q(v)}.$$

Тогда (аналогично определению 11) определены длины гладких кривых на поверхности гиперболоида — в частности, прямых нашей модели. *Угол* между прямыми мы определим как угол между соответствующими касательными векторами в касательно плоскости:

$$\cos\angle(v_1, v_2) = \frac{\langle v_1, v_2\rangle}{\sqrt{\langle v_1, v_1\rangle}\cdot\sqrt{\langle v_2, v_2\rangle}}.$$

Осталось описать группу движений. Аналогично группе вращений $SO(3)$, сохраняющей трёхмерную евклидову метрику, есть группа $SO(2,1)$ линейных преобразований трёхмерного пространства, сохраняющих форму Q. Такие преобразования оставляют на месте гиперболоид, и потому либо сохраняют его половинки, либо меняют их местами. Рассмотрим подгруппу индекса 2 сохраняющих H преобразований; обозначим её через $SO_+(2,1)$. Искомой *группой движений* и будут ограничения преобразований из $SO_+(2,1)$ на H.

Осталось найти изоморфизмы между всеми этими моделями. Проще всего предъявить изоморфизм между моделью Клейна и моделью в гиперболоиде. А именно, спроектируем H из начала координат на плоскость $z = 1$.

Несложно видеть, что образом такой проекции будет единичный диск в этой плоскости. Кроме того, прямые модели в гиперболоиде были сечениями плоскостями, проходящими чеез начало координат — поэтому они при таком проектировании перейдут в отрезки прямых, то есть в прямые модели Клейна. Остаётся проверить совпадение расстояний и групп движений.

Поскольку преобразования из $SO_+(2,1)$ — линейные, им (по определению!) соответствуют проективные преобразования плоскости $z = 1$. Как несложно видеть, диск $z = 1$ при этом тоже сохраняется.

Задача 26. *i*) Проверьте, что любое проективное преобразование плоскости, сохраняющее единичный диск, получается проективизацией отображения из $SO_+(2,1)$.

ii) Проверьте, что при проецировании метрика в модели на гиперболоиде переходит в метрику модели Клейна.

Наконец, в заключение мы предъявим изоморфизм между моделью в гиперболоиде и моделью Пуанкаре в диске. А именно, рассмотрим на этот раз проекцию на плоскость $z = 0$ из точки $(0, 0, -1)$; в определённом смысле, это аналог стереографической проекции.

На самом деле, эта аналогия довольно точная. А именно, при обычной стереографической проекции образом лежащей на сфере окружности — т. е., сечения сферы плоскостью — будет окружность. Оказывается, то же верно и в нашей ситуации: образы сечений гиперболоида плоскостями оказываются окружностями.

Это можно увидеть несколькими разными способами — в том числе, сделав «комплексную» замену координат $\tilde{x} = ix$, $\tilde{y} = iy$, после которой псевдосфера становится обычной сферой $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + z^2 = 1$ и сославшись на то, что все формулы, выписываемые для стереографической проекции — рациональные.

Более того, аналогично тому, что симметрия относительно плоскости $z = 0$ под действием обычной стереографической проекции переходит в инверсию, для псевдосферы в инверсию переходит центральная симметрия на гиперболоиде.

Тем самым, образы сечений проходящими через начало координат плоскостями — окружности, инвариантные относительно инверсии, то есть, перпендикулярные единичной. Значит, прямые модели в гиперболоиде при проецировании переходят в прямые в модели Пуанкаре.

Задача 27. Проверьте, что метрика, углы и группа движений для моделей в гиперболоиде и в круге также переходят при проецировании друг в друга.