СКЛЕЙКИ И ПЕРЕСТАНОВКИ ТОЧЕК

Ю.М.БУРМАН

Для специалистов. Это — слегка расширенная запись курса из четырех лекций, прочитанных автором на V летней школе "Современная математика" (Дубна, июль 2005 г.). Основной материал лекций составили теоремы об описании симметрических степеней вещественных и комплексных многообразий малой размерности. В разбираемых примерах неявным образом появляются многие важные понятия геометрии и топологии — многообразия, расслоения, группа кос, раздутия, разложение Хегора — но мы избегали давать явные определения, чтобы не предъявлять излишних требований к подготовке слушателей.

В современной геометрии (и топологии) "точкой" можно назвать все, что угодно. Например, число. Или прямую. Или пару точек. Эти точки можно собирать в "пространства" (топологические) и изучать геометрию этих пространств. Два пространства A и B называются *гомеоморфными*, если между их точками можно установить взаимно однозначное непрерывное соответствие $f : A \to B$, обратное к которому $f^{-1} : B \to A$ тоже непрерывно.

Непрерывность соответствия f необходима, чтобы можно было говорить о том, что геометрия пространств A и B одинакова. Хорошо известно, например, что можно установить взаимно однозначное соответствие между точками прямой и точками плоскости; между тем, геометрические свойства прямой и плоскости совершенно разные. Можно, однако, показать, что *непрерывного* взаимно однозначного соответствия между прямой и плоскостью нет — эти пространства не гомеоморфны.

Возникает вопрос, какие отображения пространства A в пространство B следует называть непрерывными. В примерах, разбору которых посвящена эта брошюра, ответ будет ясен из здравого смысла. В более сложных ситуациях, однако, необходимо формальное определение, которое дается в каждом случае (для каждого пространства) отдельно.

Большинство геометрических объектов, с которыми мы будем иметь дело (окружность, двух- и трехмерная сфера, лента Мебиуса, прямые, плоскости и гиперплоскости), хорошо известны читателям из повседневного опыта. Тем не менее, некоторые гомеоморфизмы могут показаться неожиданными. Мы будем стремиться описывать все соответствия как можно более прозрачно, предпочтительно — с помощью явных формул или простых геометрических конструкций. После каждого параграфа приводятся несколько упражнений, решив которые, читатель подробнее познакомится со структурой объектов (пространств и соответствий между ними), описанных в основном тексте.

1. Симметрические степени кривых

Декартовым произведением двух пространств A и B (обозначение $A \times B$) называется множество пар (a, b), где a — точка пространства A, а b — точка пространства B. Можно также рассматривать многократные произведения $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ — пространства наборов $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, в которых $a_i \in A_i$ при всех $i = 1, \dots, n$. Как и для обычного произведения, можно умножать пространство несколько раз на себя, получая декартову степень $A^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in A\}$.

Пример 1.1. Декартов квадрат прямой $\mathbb{R}$ — плоскость $\mathbb{R}^2$. Соответствие между точками плоскости и парами точек прямой (то есть парами действительных чисел) устанавливается с помощью декартовой (же) системы прямоугольных координат.

Пример 1.2. Декартов квадрат окружности $(S^1)^2$ называется двумерным тором (k-я декартова степень — k-мерным тором). Окружность S^1 гомеоморфна отрезку с отождествленными концами: $S^1 = [0,1]/(0 \sim 1)$. Отсюда вытекает, что двумерный тор гомеоморфен множеству пар чисел (x, y), где $0 \le x, y \le 1$, причем для всякого x пара $(x, 0)$ отождествляется с $(x, 1)$, а для всякого y пара $(0, y)$ — с парой $(1, y)$. Множество пар (x, y), $0 \le x, y \le 1$, это квадрат, а отождествления означают, что у квадрата склеиваются две пары параллельных сторон: каждая точка нижней стороны — с лежащей прямо над нею точкой верхней стороны, и аналогично для левой и правой.

Двумерному тору гомеоморфна поверхность спасательного круга.

Геометрия декартовых степеней обычно несложная. Ситуация становится более интересной, если рассматривать *неупорядоченные* наборы (пары, тройки и т.д.) точек в пространстве A. Пространство таких наборов $(\!(a_1, \dots, a_n)\!)$ длины n называется n-ой *симметрической степенью* пространства A и обозначается $A^{(n)}$. Заметим, что среди точек $a_1, \dots, a_n$ могут быть одинаковые.

Пример 1.3. Пусть $A = (\mathbb{R}^1)^{(2)}$, то есть пространство пар действительных чисел $(\!(x_1, x_2)\!)$, причем пары, отличающиеся только порядком чисел, считаются одинаковыми: $(\!(x_1, x_2)\!) = (\!(x_2, x_1)\!)$. Точкам разрешено совпадать. Такую пару можно однозначно записать в виде (x_1, x_2) (скобки простые !), где $x_1 \le x_2$ — следовательно, множество A гомеоморфно полуплоскости $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \le x_2\}$. Граница этой полуплоскости соответствует множеству пар $(\!(x_1, x_2)\!)$ с совпадающими точками.

Аналогичным образом, множество неупорядоченных наборов $(\!(x_1, \dots, x_n)\!)$ из n действительных чисел гомеоморфно множеству $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \le x_2 \le \dots \le x_n\}$. Это множество — многогранный угол; его грани (разных размерностей) нумеруются наборами (упорядоченными !) $(k_1, \dots, k_s)$ целых чисел, в которых $k_1, \dots, k_s \ge 1$ и $k_1 + \dots + k_s = n$. А именно, набору $k_1, \dots, k_s$ соответствует множество точек $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ таких, что $x_1 = \dots = x_{k_1} < x_{k_1+1} = \dots = x_{k_1+k_2} < \dots$ (k_1 наименьших чисел равны друг другу, следующие k_2 тоже равны, но больше, чем первые, и т.д.).

Пример 1.4. Рассмотрим теперь множество $(S^1)^{(2)}$ неупорядоченных пар $(\!(x_1, x_2)\!)$ точек на окружности. Имеется естественное отображение $\mathbb{T}^2 = (S^1)^2 \to (S^1)^{(2)}$, сопоставляющее каждой упорядоченной паре (x_1, x_2) неупорядоченную пару $(\!(x_1, x_2)\!)$. Это отображение позволяет описать пространство $(S^1)^{(2)}$ как тор,

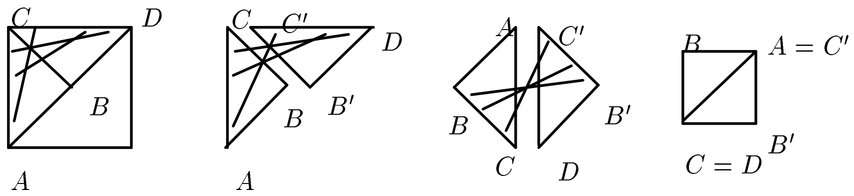

Рис. 1.1. $(S^1)^{(2)}$ — лента Мебиуса

в котором склеены точки, имеющие один и тот же образ, то есть (x_1, x_2) и (x_2, x_1). Если представить себе тор как квадрат со склеенными сторонами (как в примере 1.2), то получится, что мы отождествляем точки, симметричные относительно диагонали. При этом можно оставить от тора лишь верхний треугольник (ACD на рисунке 1.1), катеты которого нужно склеить "переносом": точка $(t, 1)$ склеивается с точкой $(0, t)$ для всех $0 \le t \le 1$ (так что, например, точка отрезка CD, отстоящая от точки C на 1 мм, склеивается с точкой отрезка AC, отстоящий на 1 мм от точки A). Разрежем теперь треугольник вдоль медианы CB, половинки разведем и склеим сторонами AC и $C'D'$ — как ранее отождествляли. При этом не следует забывать, что вновь образовавшиеся стороны BC и $B'C'$ нужно отождествлять. В результате (см. рис. 1.1) получится квадрат, у которого отождествлены две параллельные стороны, причем с "перекруткой": точка $(0, t)$ склеивается с точкой $(1, 1-t)$ для всех $0 \le t \le 1$. Получилось, что пространство $(S^1)^{(2)}$ гомеоморфно знаменитой ленте Мебиуса.

Край ленты Мебиуса получается из диагонали AD тора и соответствует парам $(\!(x_1, x_2)\!)$, в которых $x_1 = x_2$.

Множество $(S^1)^{(2)}$ можно отобразить на единичный круг, ограниченный окружностью S^1, сопоставив каждой паре точек $(\!(x_1, x_2)\!)$ середину $m(x_1, x_2)$ соединяющей их хорды. Если $p = m(x_1, x_2)$ не является центром круга, то пара $(\!(x_1, x_2)\!)$ восстанавливается по точке p однозначно. Если же p — центр круга, то прообраз $m^{-1}(p) \subset (S^1)^{(2)}$ состоит из всех пар $(\!(x_1, x_2)\!)$, в которых точки диаметрально противоположны и соответствует средней линии ленты Мебиуса. Действительно, нетрудно убедиться, что лента Мебиуса, из которой вырезали среднюю линию, гомеоморфна кругу без центра. Операция, при которой из круга удаляется точка (центр) и на ее место вклеивается описанным способом окружность, называется раздутием (точки) или σ-процессом. Раздутия бывают не только в размерности 1 (как здесь), но и в больших размерностях, и не только вещественные (как здесь), но и комплексные; мы с ними еще столкнемся.

Если прямая на плоскости пересекает единичный круг с центром в начале координат, то она пересекает его границу S^1 либо в двух точках, либо в одной "двойной" точке. Таким образом, пространство $(S^1)^{(2)}$ из предыдущего примера гомеоморфно пространству всех $L(1)$ прямых, пересекающих единичный круг. Прямые, проходящие через начало координат, соответствуют парам диаметрально противоположных точек, то есть средней линии ленты Мебиуса.

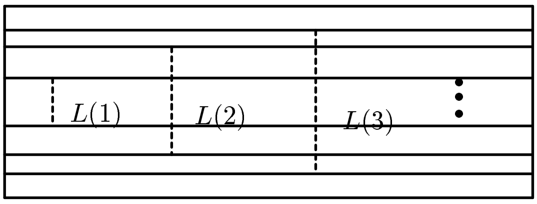

Рис. 1.2. Ленты Мебиуса разной ширины

Можно рассмотреть также пространства $L(r)$ — пространства прямых, пересекающих круг радиуса $r > 1$ с тем же центром. Они, разумеется, все гомеоморфны друг другу и ленте Мебиуса: гомеоморфизм $L(r) \to L(1)$ порожден сжатием плоскости (гомотетией) к началу координат в r раз. С другой стороны, они вложены друг в друга: $L(r_1) \subset L(r_2)$ при $r_1 < r_2$. Это соответствует вложению лент Мебиуса: лента, соответствующая $L(r_1)$, это окрестность средней линии ленты, соответствующей $L(r_2)$. Можно рассмотреть объединение $\bigcup_r L(r)$, то есть пространство *всех* прямых на плоскости. Оно гомеоморфно объединению всех вложенных друг в друга описанным способом лент Мебиуса — то есть, ленте Мебиуса без края (см. рис. 1.2).

Множество прямых, проходящих через начало координат это по-прежнему средняя линия полученной ленты Мебиуса (поскольку у всех лент Мебиуса, соответствующих разным $L(r)$, одна и та же средняя линия). Отсюда вытекает, что это множество гомеоморфно окружности. Это можно доказать и напрямую, см. рис. 2.1 и рассуждения в начале раздела 2. Множество прямых, параллельных данной прямой, это "трансверсаль" на ленте Мебиуса — отрезок (без концов), проходящий от какой-то точки края до противоположной. Такая трансверсаль пересекает среднюю линию в единственной точке — это соответствует V постулату Евклида: через каждую точку можно провести ровно одну прямую, параллельную данной.

Рассмотрим теперь множество $(S^1)^{(3)}$ неупорядоченных троек $(\!(x_1, x_2, x_3)\!)$ точек на окружности. Каждой точке можно сопоставить ее угловую координату φ, определенную с точностью до прибавления целых кратных 2π. Сопоставим теперь тройке точек $(\!(x_1, x_2, x_3)\!)$ сумму их угловых координат, также рассматриваемую с точностью до прибавления целых кратных 2π, — получается отображение $f : (S^1)^{(3)} \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} = S^1$.

Пусть сначала $f(x_1, x_2, x_3) = 0$. Нетрудно проверить, что значения угловых координат φ_1, φ_2, φ_3 точек x_1, x_2, x_3 можно выбрать так, чтобы выполнялись неравенства

$$\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \varphi_3 \leq \varphi_1 + 2\pi. \tag{1.1}$$

При этом получится $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Замена координат $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \mapsto (\varphi_2, \varphi_3, \varphi_1 + 2\pi)$ сохраняет неравенства (1.1), но увеличивает значение k на единицу; обратная замена $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \mapsto (\varphi_3 - 2\pi, \varphi_1, \varphi_2)$ — уменьшает. Сделав несколько таких замен, можно выбрать координаты так, чтобы $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0$. С другой стороны, если ψ_1, ψ_2, ψ_3 — другая тройка координат тех же точек x_1, x_2, x_3, удовлетворяющая неравенствам (1.1), причем $\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = 0$, то, как нетрудно видеть, $\psi_i = \varphi_i$ для всех $i = 1, 2, 3$. Таким образом,

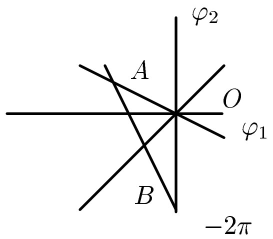

Рис. 1.3. Нормальные координаты в $f^{-1}(0) \subset (S^1)^{(3)}$

множество $f^{-1}(0) \subset (S^1)^{(3)}$ гомеоморфно множеству троек чисел $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, удовлетворяющих равенству $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0$ и неравенствам (1.1). Выражая $\varphi_3 = -\varphi_1 - \varphi_2$, получим систему неравенств $\varphi_2 \geq \varphi_1$, $\varphi_2 \leq \varphi_1/2$, $\varphi_2 \geq -2\varphi_1 - 2\pi$, решение которой — треугольник OAB на рис. 1.3.

Пусть теперь $f(x_1, x_2, x_3) = t$. В этом случае можно выбрать угловые координаты ψ_1, ψ_2, ψ_3 так, чтобы числа $\varphi_1 = \psi_1 - t/3$, $\varphi_2 = \psi_2 - t/3$, $\varphi_3 = \psi_3 - t/3$ удовлетворяли неравенствам (1.1). Тем самым определен гомеоморфизм множеств $f^{-1}(t)$ и $f^{-1}(0)$ при всех t.

Этот гомеоморфизм зависит от t непрерывно. Таким образом, мы представили $(S^1)^{(3)}$ в виде треугольной призмы $T \times [0, 2\pi]$, где T — треугольник. Вспомним, однако, что $t = 0$ и $t = 2\pi$ представляют собой одну и ту же точку окружности. Тем самым основания призмы нужно склеить, причем склейка, вообще говоря, происходит по нетривиальному отображению треугольника в себя. А именно, координаты $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, выбираемые согласно правилам при $t = 2\pi$, удовлетворяют стандартным неравенствам и равенству $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 2\pi$. Согласно приведенной выше конструкции, такая тройка соответствует тройке чисел $(\varphi_3 - 2\pi, \varphi_1, \varphi_2) \in T$. Нетрудно видеть, что преобразование $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \mapsto (\varphi_3 - 2\pi, \varphi_1, \varphi_2)$ представляет собой "поворот" треугольника, переводящий его вершины по циклу $O \mapsto A \mapsto B \mapsto O$.

Следовательно, два основания призмы склеены друг с другом, но при этом перекручены на одну треть полного оборота. Полученное пространство гомеоморфно полноторию (спасательному кругу, вместе с внутренностью). Все три ребра призмы склеились в одну линию, соответствующую тройкам точек $(\!(x_1, x_2, x_3)\!)$, в которых все три точки совпадают. Все три грани пирамиды также склеились в единственную прямоугольную грань — она соответствует тройкам $(\!(x_1, x_2, x_3)\!)$, в которых две точки совпадают, а третья не обязательно.

Упражнение 1.1. Какому подмножеству ленты Мебиуса соответствует множество прямых на плоскости, проходящих через фиксированную точку A, отличную от начала координат ?

Упражнение 1.2. Докажите, что при *нечетном* n симметрическая степень $(S^1)^{(n)}$ гомеоморфна декартову произведению окружности на $(n-1)$-мерный шар. Что можно сказать про случай четного n ?

2. Проективные пространства

2.1. Вещественные. Вещественным проективным пространством размерности n (обозначение $\mathbb{R}P^n$) называется множество прямых в пространстве

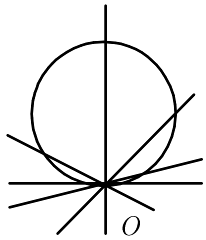

Рис. 2.1. $\mathbb{R}P^1$ — окружность

$\mathbb{R}^{n+1}$, проходящих через начало координат. Это пространство можно описать несколькими способами.

Пример 2.1. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ единичную сферу с центром в начале координат (то есть множество точек $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, для которых $x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$). Каждая прямая пересекает эту сферу в двух диаметрально противоположных точках; поэтому $\mathbb{R}P^n$ это множество пар диаметрально противоположных точек на сфере S^n. Это можно еще выразить следующим образом: существует отображение $f : S^n \to \mathbb{R}P^n$ (сопоставляющее каждой точке A сферы прямую, проходящую через эту точку и начало координат) такое, что прообраз $f^{-1}(\ell) \subset S^n$ произвольной прямой $\ell \in \mathbb{R}P^n$ состоит из двух диаметрально противоположных точек.

Пример 2.2. Оставим теперь от сферы S^n верхнюю полусферу $x_n \geq 0$. Тогда из каждой пары диаметрально противоположных точек, не лежащих в экваториальной $(n-1)$-мерной сфере $x_n = 0$, ровно одна лежит в полусфере. Тем самым $\mathbb{R}P^n$ это полусфера, у которой попарно склеены пары диаметрально противоположных точек границы. Полусферу можно спроектировать на гиперплоскость $x_n = 0$ и заменить шаром (отрезком для $\mathbb{R}P^1$, кругом для $\mathbb{R}P^2$). Тем самым, $\mathbb{R}P^n$ это n-мерный шар, у которого попарно отождествляются диаметрально противоположные точки границы.

Пример 2.3. Каждая прямая $\ell \in \mathbb{R}P^n$ (проходящая через начало координат) однозначно определяется, если задать какой-либо принадлежащей ей ненулевой вектор $v = (a_0, \ldots, a_n) \in \ell$. С другой стороны, вектор v определяется прямой ℓ с точностью до умножения на произвольное ненулевое вещественное число. Следовательно, точки $\ell \in \mathbb{R}P^n$ однозначно задаются в виде строк $[a_0 : \cdots : a_n]$ вещественных чисел, не равных одновременно нулю, где строки, отличающиеся на общий множитель, считаются равными: $[a_0 : \cdots : a_n] = [\lambda a_0 : \cdots : \lambda a_n]$ при $\lambda \neq 0$. Набор $[a_0 : \cdots : a_n]$ называется однородными координатами точки $\ell \in \mathbb{R}P^n$.

Самое простое из проективных пространств — проективная прямая $\mathbb{R}P^1$. Оказывается, она гомеоморфна окружности S^1, причем это можно доказать даже несколькими (впрочем, похожими) способами — см. рисунок 2.1 для иллюстрации дальнейших рассуждений.

Способ 1. Рассмотрим на плоскости окружность ω, проходящую через начало координат. Всякая прямая $\ell \in \mathbb{R}P^1$ пересекает ω в начале координат. Одна из прямых — касательная ℓ_0 к ω в начале координат — других точек пересечения не имеет, а всякая другая прямая ℓ пересекает ω еще в одной точке. Это позволяет установить взаимно однозначное соответствие между точками $A \in \omega$ и прямыми $\ell \in \mathbb{R}P^1$: всякой точке $A \neq O$ соответствует прямая OA, а началу координат O — прямая ℓ_0, касательная к ω в O.

Способ 2. Как уже отмечалось (для произвольной размерности n), существует отображение $f : S^1 \to \mathbb{R}P^1$, для которого прообраз $f^{-1}(\ell)$ любой прямой — пара диаметрально противоположных точек. С другой стороны, рассмотрим отображение $F : S^1 \to S^1$, удваивающее угловую координату: точке окружности с угловой координатой φ (определенной с точностью до прибавления целых кратных 2π) соответствует точка с угловой координатой 2φ. Как нетрудно видеть, для любой точки $a \in S^1$ ее прообраз $F^{-1}(a)$ также представляет собой пару диаметрально противоположных точек на окружности. Это дает возможность построить взаимно однозначное соответствие между S^1 и $\mathbb{R}P^1$: точке $a \in S^1$ соответствует такая прямая $\ell \in \mathbb{R}P^1$, что $F^{-1}(a) = f^{-1}(\ell)$.

Замечание. На самом деле Способ 1 и Способ 2 дают одно и тоже взаимно однозначное соответствие между S^1 и $\mathbb{R}P^1$. Причиной этого является тот факт, что угол между касательной и хордой вдвое меньше центрального угла, опирающегося на эту хорду.

Способ 3. Можно использовать задание точек $\mathbb{R}P^1$ однородными координатами. Действительно, $\mathbb{R}P^1$ это множество наборов $[a : b]$. Если $b \neq 0$, то $[a : b] = [a/b : 1]$. Тем самым такая точка $[a : b]$ полностью определяется действительным числом a/b, и множество таких точек гомеоморфно прямой $\mathbb{R}$. Если же $b = 0$, то $a \neq 0$, откуда $[a : 0] = [1 : 0]$ — такая точка только одна. Если $b \to 0$, то $a/b \to \infty$, и одновременно $[a : b] \to [1 : 0]$. Тем самым точки, близкие в $\mathbb{R}P^1$ к точке $[1 : 0]$, это точки $x \in \mathbb{R}$ с большим модулем. Иными словами, точка $[1 : 0]$ приклеивается к $\mathbb{R}$ на “двусторонней бесконечности” — получается окружность S^1.

С помощью однородных координат можно записать соответствие между $\mathbb{R}P^1$ и S^1, полученное Способом 1, в виде явных формул. А именно, реализуем окружность S^1 как множество $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Тогда каждой точке (x, y) окружности соответствует прямая, проходящая через начало координат и точку, лежащую на единицу выше (мы считаем, что окружность ω, с помощью которой мы строим соответствие, касается оси абсцисс). Тем самым эта прямая содержит точку с координатами $(x, y+1)$, и ее однородные координаты есть $[x : y+1]$. Эта конструкция не работает, если взять самую нижнюю точку окружности, с координатами $(0, -1)$ — тогда после сдвига вверх получается начало координат, и прямая однозначно не определена (на самом деле должна была получиться ось ординат, но конструкция этого не дает). Формула тоже отказывает — получается точка $[0 : 0]$, которой на проективной прямой нет. Чтобы справиться с этой проблемой, заметим, что имеет место равенство $[x : y + 1] = [1 - y : x]$ (равносильное $x^2 + y^2 = 1$). При $x = 0$, $y = -1$ вторая формула дает правильный ответ — вертикальную прямую $[2 : 0] = [1 : 0]$. Вторая формула, в свою очередь, не работает при $x = 0$, $y = 1$ (самая верхняя точка окружности) — но тогда работает первая.

Чтобы написать явные формулы для обратного отображения $\mathbb{R}P^1 \to S^1$, нужно найти точку пересечения прямой с однородными координатами $[a : b]$, с окружностью ω. Уравнение окружности ω это $x^2+(y-1)^2=1$, или, равносильно, $x^2+y^2=2y$. Прямая $[a:b]$ состоит, по определению, из точек с координатами $(\lambda a, \lambda b)$, где $\lambda \in \mathbb{R}$. Получаем $\lambda^2(a^2+b^2)=2\lambda b$, откуда либо $\lambda=0$ (что соответствует пересечению прямой и окружности в начале координат), либо $\lambda = 2b/(a^2+b^2)$, откуда $x=2ab/(a^2+b^2)$, $y=2b^2/(a^2+b^2)$. Точка окружности, соответствующая прямой, лежит на единицу ниже точки с координатами (x,y) — следовательно, она имеет координаты $(2ab/(a^2+b^2), (b^2-a^2)/(a^2+b^2))$. Заметим, что написанные формулы работают всегда — знаменатель не может быть нулем, поскольку числа a и b не равны нулю одновременно.

Упражнение 2.1. Какому геометрическому факту соответствует равенство $[x:y+1]=[1-y:x]$?

2.2. Комплексные. У рассмотренной конструкции имеется комплексный аналог. А именно, можно рассмотреть пространство $\mathbb{C}^{n+1}$ наборов из $n+1$ комплексного числа и в нем множество *комплексных* прямых, проходящих через начало координат. Такая прямая задается как множество $\{(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$, где $a_0, \dots . a_n$ — комплексные числа, не равные одновременно нулю. Множество таких прямых называется комплексным n-мерным проективным пространством и обозначается $\mathbb{C}P^n$. Точки $\ell \in \mathbb{C}P^n$ задаются наборами комплексных однородных координат $[a_0 : \dots : a_n]$, где $[a_0 : \dots : a_n] = [\lambda a_0 : \dots : \lambda a_n]$ при $\lambda \neq 0$ (λ теперь — комплексное число !).

Аналогично равенству $\mathbb{R}P^1 = S^1$ имеет место гомеоморфизм $\mathbb{C}P^1 = S^2$. Простейшее доказательство этого факта — аналог приведенного выше Способа 3 для $\mathbb{R}P^1 = S^1$: сфера S^2 получается приклеиванием точки $[1:0]$ к плоскости $\mathbb{C} = \{[z:1] \mid z \in \mathbb{C}\}$ на бесконечности. Мы приведем еще одно доказательство — аналог явных формул для Способа 1.

А именно, представим сферу как подмножество в $\mathbb{R}^3$, заданное уравнением $x^2+y^2+z^2=1$, и сопоставим точке (x,y,z) точку $[x+iy : 1-z] = [1+z : x-iy] \in \mathbb{C}P^1$. Это отображение определено корректно: действительно, если $x=y=0$ и $z=1$, то первая формула не работает (получается $[0:0]$), но работает вторая; если $x=y=0$ и $z=-1$, то наоборот; в прочих случаях работают обе формулы. Это отображение взаимно однозначно: обратное задается формулой $x = \frac{2\operatorname{Re}(u\bar{v})}{|u|^2+|v|^2}$, $y = \frac{2\operatorname{Im}(u\bar{v})}{|u|^2+|v|^2}$, $z = \frac{|u|^2-|v|^2}{|u|^2+|v|^2}$.

Экватору сферы $\{(x,y,0) \mid x^2+y^2=1\} \subset S^2$ соответствует множество точек $\{[z:1] \in \mathbb{C}P^1 \mid |z|=1\}$, прочим параллелям — множества комплексных чисел с другими фиксированными модулями; меридианам — множества комплексных чисел с фиксированными аргументами (плюс точки $0=[0:1]$ и $\infty = [1:0]$).

Отождествим теперь пространство $\mathbb{C}^{n+1}$ с $\mathbb{R}^{2n+2}$ и рассмотрим в нем единичную сферу S^{2n+1} с центром в начале координат. Для каждой точки $(x_0, \dots, x_{2n+1})$ этой сферы существует единственная комплексная прямая, проходящая через нее и через начало координат — это прямая $[a_0 : a_1 : \dots : a_n] = [x_0+ix_1 : x_2 + ix_3 : \dots x_{2n} + ix_{2n+1}]$. Получается отображение $f: S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$, аналогичное описанному ранее отображению $f: S^n \to \mathbb{R}P^n$. Нетрудно видеть, что прообраз $f^{-1}([a_0 : a_1 : \dots : a_n]) \subset S^{2n+1}$ — окружность $\{(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) \mid \lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda|=1\}$.

Рассмотрим подробнее случай $n=1$ — тут получается отображение $f: S^3 \to \mathbb{C}P^1 = S^2$, называемое *расслоением Хопфа*. Оно переводит точку $(x,y,z,t) \in$

$\mathbb{R}^4$, $x^2+y^2+z^2+t^2=1$, в точку $[x+iy : z+it] \in \mathbb{C}P^1$. Если это точка вида $[\alpha+i\beta : 1]$, то ее прообраз $f^{-1}(\alpha+i\beta)$ задается в $\mathbb{R}^4$ уравнениями $x^2+y^2+z^2+t^2=1$ и $x+iy=(z+it)(\alpha+i\beta)$, то есть (приравниваем действительную и мнимую части) $x=z\alpha-t\beta$, $y=z\beta+t\alpha$. Тем самым этот прообраз представляет собой пересечение трехмерной сферы и двух несовпадающих трехмерных подпространств в четырехмерном пространстве — следовательно, это окружность единичного радиуса с центром в начале координат. То же самое верно и для прообраза бесконечно удаленной точки: $f^{-1}([1:0])=\{(x,y,0,0) \mid x^2+y^2=1\}$.

Выкинем из трехмерной сферы точку $(0,0,0,1)$ и оставшиеся точки отобразим (взаимно однозначно) в $\mathbb{R}^3$ с помощью стереографической проекции $(x,y,z,t) \mapsto (p,q,r)=(x/(1-t), y/(1-t).z/(1-t))$. При этом образ окружности $f^{-1}(\alpha+i\beta)$ лежит целиком в плоскости, заданной уравнением $\alpha p+\beta q-(\alpha^2+\beta^2)r=0$ (случай $\alpha=\beta=0$ мы разберем чуть ниже). В этой плоскости можно задать ортонормированный базис, состоящий из векторов $e_1=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}}(\alpha,\beta,1)$ и $e_2=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}(-\beta,\alpha,0)$. Нетрудно видеть, что точка $(p,q,r)=se_1+te_2$ лежит в образе множества $f^{-1}(\alpha+i\beta)$ при стереографической проекции тогда и только тогда, когда s и t удовлетворяют уравнению $s^2+t^2-t/\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=1$ или, что то же самое, $s^2+(t-1/2\sqrt{\alpha^2+\beta^2})^2=1+1/4(\alpha^2+\beta^2)$. Это уравнение окружности.

Тем самым показано, что прообразы точек ("слои") $f^{-1}(h)$ расслоения Хопфа при $h \in \mathbb{C}P^1 \setminus \{[0:1],[1:0]\}$ после стереографической проекции переходят в непересекающиеся окружности. Образ слоя $f^{-1}([1:0])$ это тоже окружность $p^2+q^2=1$, $r=0$. Образ же слоя $f^{-1}([0:1])$ задается условиями $p=q=0$ и является прямой. Эта аномалия связана с тем, что при стереографической проекции мы удалили из сферы одну точку, которая как раз принадлежит $f^{-1}([0:1])$.

Упражнение 2.2. а) Докажите, что всякий слой $f^{-1}([a:b])$, где $a,b \neq 0$, пересекает проколотый круг $0<p^2+q^2<1, r=0$, ровно в одной точке, а плоскость $r=0$ — ровно в двух точках. б) Как связаны между собой координаты этих двух точек ?

Упражнение 2.3. Докажите, что образы любых двух слоев при стереографической проекции "зацеплены", как соседние звенья цепи. (Особенно хорошо это видно для слоев $f^{-1}([1:0])$ и $f^{-1}([0:1])$.)

Замечание. Напомним, что расслоение Хопфа является комплексным аналогом отображения $f : S^1 \to \mathbb{R}P^1 = S^1$, при котором прообразы точек $f^{-1}(h)$ это пары диаметрально противоположных точек окружности. Две неупорядоченные пары точек $(\!(a,b)\!)$ и $(\!(c,d)\!)$ на окружности могут быть расположены двумя способами: либо чередоваться (a,c,b,d), либо стоять попарно (a,b,c,d). Нетрудно видеть, что пары диаметрально противоположных точек — например, $f^{-1}(h_1)$ и $f^{-1}(h_2)$ для $h_1 \neq h_2$ — всегда чередуются. Оказывается, это "вещественный" аналог того факта (упражнение 2.3), что прообразы двух точек при расслоении Хопфа зацеплены.

3. Симметрические степени поверхностей

До сих пор (в разделе 1) мы имели дело с симметрическими степенями (множествами неупорядоченных наборов точек) прямой и окружности — одномерных объектов. Рассмотрим теперь пространство $(\mathbb{R}^2)^{(n)}$ неупорядоченных наборов из n точек на плоскости. Для описания этого множества отождествим $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$; теперь неупорядоченному набору $(\!(x_1, \dots, x_n)\!)$ комплексных чисел сопоставим набор (упорядоченный !) коэффициентов $e_1, \dots, e_n$ многочлена $t^n + e_1(x)t^{n-1} + \dots + e_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} (t+x_1)\dots(t+x_n)$, то есть набор элементарных симметрических функций от переменных $x_1, \dots, x_n$. Этим самым определено отображение $f : \mathbb{C}^{(n)} \to \mathbb{C}^n$. Поскольку каждый многочлен степени n с комплексными коэффициентами имеет n комплексных корней (возможно, совпадающих), это соответствие взаимно однозначно. Тем самым $\mathbb{C}^{(n)}$ гомеоморфно $\mathbb{C}^n$ — большой контраст с "одномерным" случаем $\mathbb{R}^{(n)}$!

Похожим образом можно описать множество $(S^2)^{(n)}$ неупорядоченных наборов из n точек на двумерной сфере. Здесь также понадобятся комплексные числа: мы отождествим сферу с комплексной проективной прямой $\mathbb{C}P^1$, то есть (см. раздел 2) с множеством пар $[u : v]$ комплексных чисел, не равных одновременно нулю и заданных с точностью до одновременного умножения на ненулевое комплексное число. Вместо многочленов от вспомогательной комплексной переменной t мы используем однородные многочлены от двух комплексных переменных t и s, то есть выражения вида $r(t,s) = r_0 t^n + r_1 t^{n-1} s + \dots + r_n s^n$, где $r_0, \dots, r_n$ — комплексные числа. Число n (степень всех одночленов, входящих в r) называется степенью многочлена r; очевидно, для всякого $\lambda \in \mathbb{C}$ имеет место равенство $r(\lambda t, \lambda s) = \lambda^n r(t,s)$.

Точка $[u : v] \in \mathbb{C}P^1$ называется корнем многочлена r, если $r(u,v) = 0$. Числа u и v (однородные координаты) определены с точностью до умножения на комплексную константу, но в силу однородности это неважно: $r(\lambda u, \lambda v) = \lambda^n r(u,v) = 0$. Заметим, однако, что если $[u : v]$ не является корнем, то значение $r(u,v)$ не определено однозначно !

Свойства однородных многочленов от двух переменных очень похожи на свойства многочленов от одной переменной. Причина этого проста: в силу однородности имеет место равенство

$$r(t,s) = s^n r(t/s, 1), \tag{3.1}$$

а выражение $q(z) = r(z,1) = r_0 z^n + r_1 z^{n-1} + \dots + r_n$ — многочлен. Правда, не исключается случай $r_0 = 0$ (скажем, $r(t,s) = s^n$), так что степень многочлена q может оказаться меньше n, но это не создает особых проблем при доказательствах. Используя представление (3.1) и свойства многочленов от одной переменной, легко показать, что

1) однородный многочлен r от 2 переменных разлагается на линейные однородные множители: $r(t,s) = (a_1 t + b_1 s)(a_2 t + b_2 s)\dots(a_n t + b_n s)$, причем разложение единственно (для ненулевого многочлена) с точностью до порядка множителей и одновременного умножения этих множителей на константы $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ такие, что $\lambda_1 \dots \lambda_n = 1$;
2) точка $[u : v] \in \mathbb{C}P^1$ является корнем многочлена r тогда и только тогда, когда она является корнем одного из его линейных множителей, т.е. когда многочлен r делится на $(vt - us)$.

Вернемся теперь к описанию симметрической степени $(S^2)^{(n)} = (\mathbb{C}P^1)^{(n)}$. Неупорядоченному набору $(\!([u_1 : v_1], \dots, [u_n : v_n])\!)$ точек $\mathbb{C}P^1$ сопоставим набор (упорядоченный) коэффициентов r_i однородного многочлена $r_0 t^n + r_1 t^{n-1} s + \dots + r_n s^n = (u_1 t + v_1 s)(u_2 t + v_2 s) \dots (u_n t + v_n s)$. Ясно, что коэффициенты r_i не равны все одновременно нулю и определены с точностью до одновременного умножения на ненулевое комплексное число. С другой стороны, из свойства 1 вытекает, что однородный многочлен имеет ровно n корней (возможно, совпадающих) $[u_1 : v_1], \dots, [u_n : v_n] \in \mathbb{C}P^1$. Следовательно, построенное отображение $(\mathbb{C}P^1)^{(n)}$ в множество наборов $[r_0 : r_1 : \dots : r_n]$ — взаимно однозначное, и симметрическая степень $(\mathbb{C}P^1)^{(n)}$ гомеоморфна проективному пространству $\mathbb{C}P^n$.

Аналогичным образом можно описывать симметрические степени подмножеств плоскости. Например, симметрическая степень проколотой плоскости $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ соответствует множеству многочленов, у которых 0 не является корнем — то есть множеству наборов $e_1, e_2, \dots, e_n$, где $e_n \neq 0$. Симметрическая степень плоскости с несколькими проколами $(\mathbb{C} \setminus \{-a_1, \dots, -a_k\})^{(n)}$ (минусы поставлены для удобства) это множество коэффициентов многочленов, для которых ни одно из чисел $a_1, \dots, a_k$ не является корнем. Иными словами, это множество наборов комплексных чисел $e_1, \dots, e_n$, удовлетворяющих системе неравенств $a_i^n + e_1 a_i^{n-1} + \dots + e_n \neq 0$, где $i = 1, \dots, k$; то есть это пространство $\mathbb{C}^n$, из которого выкинуто k комплексных гиперплоскостей.

Вот еще один пример задачи, которую можно решить, используя “многочленную” технику: что представляет собой геометрически множество неупорядоченных пар точек на $S^2 = \mathbb{C}P^1$, причем две пары считаются одинаковыми, если их можно получить друг из друга одновременной заменой обеих точек на диаметрально противоположные ? Чтобы ответить на этот вопрос, заметим, что при соответствии $S^2 = \mathbb{C}P^1$, описанном в разделе 2, замена точки $a = (x, y, z) \in S^2$ на противоположную (то есть на $(-x, -y, -z)$) отвечает замене точки $[u : v] \in \mathbb{C}P^1$ на $[-\bar{v} : \bar{u}]$.

Сопоставим теперь любой паре комплексных чисел (u, v), не равных одновременно нулю, однородный многочлен степени 2 (квадратичную форму) $R_{u,v}(t, s) = (ut + vs)(-\bar{v}t + \bar{u}s)$.

Этот многочлен обладает следующими свойствами:

1) При одновременном умножении u и v на ненулевое комплексное число λ функция $R_{u,v}$ умножается на положительное вещественное число $|\lambda|^2$: $R_{\lambda u, \lambda v}(t, s) = |\lambda|^2 R_{u,v}(t, s)$.
2) При замене $(u, v) \mapsto (-\bar{v}, \bar{u})$ функция $R_{u,v}$ меняет знак: $R_{-\bar{v}, \bar{u}}(t, s) = -R_{u,v}(t, s)$.
3) $R_{u,v}(-\overline{s}, \overline{t}) = -\overline{R_{u,v}(t, s)}$.

Более того, нетрудно убедиться, что любая квадратичная форма, обладающая свойством 3, однозначно записывается в виде $\alpha R_{u,v}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$ (т.е. является функцией вида $\alpha R_{u,v}$, причем α, u и v определены однозначно). Действительно, у такой формы есть два корня, $[u_1 : v_1]$ и $[u_2 : v_2]$. У формы $R_{u,v}(-\overline{s}, \overline{t})$ корни, с одной стороны, те же самые, а с другой стороны, это $[-\overline{v}_1 : \overline{u}_1]$ и $[-\overline{v}_2 : \overline{u}_2]$. Тем самым, одно из двух: либо

$$
\begin{aligned}
&[u_1 : v_1] = [-\overline{v}_1 : \overline{u}_1], \\
&[u_2 : v_2] = [-\overline{v}_2 : \overline{u}_2],
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

либо

$$[u_1 : v_1] = [-\overline{v}_2 : \overline{u}_2],\qquad (3.3)$$
$$[u_2 : v_2] = [-\overline{v}_1 : \overline{u}_1].$$

Нетрудно видеть, что случай (3.2) невозможен: точки $[u_1 : v_1]$ и $[-\overline{v}_1 : \overline{u}_1]$ при гомеоморфизме $\mathbb{C}P^1$ и S^2 соответствуют диаметрально противоположным точкам сферы, которые никогда не совпадают (другой способ убедиться в невозможности — прямой: если $u_1 = -\lambda\overline{v}_1$, а $v_1 = \lambda\overline{u}_1$, то $u_1 = -\lambda\overline{\lambda}u_1$ и $v_1 = -\lambda\overline{\lambda}v_1$, откуда $|\lambda|^2 = -1$ — так не бывает). Тем самым имеет место случай (3.3), то есть корнями квадратичной формы R являются точки вида $[p : q]$ и $[-\overline{q} : \overline{p}]$. Отсюда немедленно вытекает равенство $R = \alpha R_{-q,p}$ для некоторой константы $\alpha \neq 0$, причем $\overline{\alpha} = \alpha$, то есть $\alpha \in \mathbb{R}$. Тем самым, однородный многочлен f степени 2, обладающий свойством 3 и заданный с точностью до пропорциональности, определяет пару $[u : v] \in \mathbb{C}P^1 = S^2$ однозначно с точностью до замены на диаметрально противоположную: $[u : v] \mapsto [-\overline{v} : \overline{u}]$.

Это утверждение можно уточнить: свойства 1 и 2 означают, что при замене $[u : v] \mapsto [-\overline{v} : \overline{u}]$ многочлен $R_{u,v}$ меняет знак, а при замене $(u, v) \mapsto (\lambda u, \lambda v)$ (которая не меняет точку $[u : v] \in \mathbb{C}P^1$) умножается на положительное число. Следовательно, многочлен степени 2, обладающий свойством 3 и заданный с точностью до умножения на *положительное* вещественное число, определяет точку $[u : v]$ однозначно.

Однородный многочлен степени 2 имеет вид $f(t, s) = a_0t^2 + a_1ts + a_2s^2$. Он удовлетворяет равенству $f(-\overline{s}, \overline{t}) = -\overline{f(t, s)}$ тогда и только тогда, когда $a_0 = -\overline{a}_2$ и $a_1 = \overline{a}_1$. Таким образом, множество всех таких многочленов образует трехмерное вещественное пространство ($a_0 \in \mathbb{C}$ можно задать произвольно, a_1 должно быть вещественным числом, а a_2 тогда определяется однозначно — всего имеем $\mathbb{C} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$). Множество ненулевых многочленов такого вида с точностью до умножения на положительное число гомеоморфно, тем самым, двумерной сфере, а с точностью до умножения на любое вещественное число — проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$. Это — еще одно доказательство известного нам равенства $\mathbb{C}P^1 = S^2$.

Пусть теперь $(\!([u_1 : v_1], [u_2 : v_2])\!)$ — неупорядоченная пара точек в $\mathbb{C}P^1$. Сопоставим ей функцию $g(t, s) = R_{u_1,v_1}(t, s)R_{u_2,v_2}(t, s)$. Это — ненулевой однородный многочлен степени 4, определенный, согласно свойству 1, с точностью до умножения на положительной вещественное число и удовлетворяющий, согласно свойству 3, равенству $g(-\overline{s}, \overline{t}) = \overline{g(t, s)}$.

Обратно, пусть g — однородный многочлен степени 4, удовлетворяющий этому равенству. Он имеет 4 корня (возможно, совпадающих) $[u_1 : v_1]$, $[u_2 : v_2]$, $[u_3 : v_3]$, $[u_4 : v_4]$. Если каждый из корней подвергнуть отражению $[u : v] \mapsto [-\overline{v} : \overline{u}]$, то многочлен, как мы знаем, перейдет в себя — следовательно, набор корней также перейдет в себя. Обозначим $\sigma(k)$ (где $k = 1, \dots, 4$) номер корня, в который переходит при отражении корень $[u_k : v_k]$. Мы уже видели, что $\sigma(k) \neq k$. С другой стороны, $\sigma(\sigma(k)) = k$ (операция отражения, повторенная дважды, является тождественным преобразованием), откуда ясно, что корни разбиваются на две пары диаметрально противоположных: $[p_1 : q_1]$, $[-\overline{q}_1 : p_1]$, $[p_2 : q_2]$, $[-\overline{q}_2 : p_2]$. Таким образом, многочлен g равен $\alpha R_{p_1,q_1} R_{p_2,q_2}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$. Иными словами, многочлен g, заданный с точностью до пропорциональности, определяет неупорядоченную пару $(([u_1:v_1],[u_2:v_2]))$ с точностью до отражения $([u:v]\mapsto[-\overline{v}:\overline{u}])$ каждой из точек. Как и в случае степени 2, нетрудно заметить, что отражение одной из точек (любой) меняет знак многочлена g, а отражение обеих точек сразу — сохраняет. Тем самым многочлен g степени 4, обладающий свойством $g(-\overline{s},\overline{t})=\overline{g(t,s)}$ и заданный с точностью до умножения на положительное число, однозначно задает неупорядоченную пару точек $(([u_1:v_1],[u_2:v_2]))$ двумерной сферы с точностью до *одновременной* замены обеих точек на диаметрально противоположные.

Как и в случае степени 2, можно убедиться, что пространство многочленов степени 4, обладающих свойством $g(-\overline{s},\overline{t})=\overline{g(t,s)}$, есть $\mathbb{R}^5$. Действительно, если $g(t,s)=a_0t^4+a_1t^3s+a_2t^2s^2+a_3ts^3+a_4s^4$, то равенство означает, что $a_4=\overline{a_0}$, $a_3=-\overline{a_1}$ и $a_2=\overline{a_2}$, так что имеется 2 свободных комплексных параметра (a_0 и a_1) и 1 вещественный (a_2). Таким образом, множество ненулевых многочленов обладающих свойством $g(-\overline{s},\overline{t})=\overline{g(t,s)}$, с точностью до умножения на положительное число есть четырехмерная сфера S^4 (например, единичная сфера в $\mathbb{R}^5$ с центром в начале координат), а с точностью до умножения на произвольное вещественное число — проективное пространство $\mathbb{R}P^4$. Таким образом, множество неупорядоченных пар точек на двумерной сфере, заданных с точностью до одновременного отражения, есть S^4, а заданных с точностью до независимого отражения каждой из точек — $\mathbb{R}P^4$. Поскольку точки на сфере S^2, заданные с точностью до отражения, образуют проективную плоскость $\mathbb{R}P^2$, последнее пространство можно, разумеется, интерпретировать как множество $(\mathbb{R}P^2)^{(2)}$ неупорядоченных пар точек на проективной плоскости.

Подобные рассуждения можно провести с и произвольным количеством точек на $S^2=\mathbb{C}P^1$. При этом получатся такие результаты: пространство $(([u_1:v_1],\ldots,[u_n:v_n]))$ неупорядоченных наборов точек на двумерной сфере, заданных с точностью до одновременной замены *четного* числа их на диаметрально противоположные, есть $2n$-мерная сфера S^{2n}, а пространство $(\mathbb{R}P^2)^{(n)}$ неупорядоченных наборов n точек на проективной плоскости есть проективное пространство $\mathbb{R}P^{2n}$.

Вернемся еще раз к соответствию $\mathbb{C}^{(n)}\to\mathbb{C}^n$ и рассмотрим подробнее случай $n=2$. Обозначим Z пространство, элементами которого являются наборы $(((x_1,x_2)),\ell)$, где $x_1,x_2\in\mathbb{R}^2$ — точки плоскости, а ℓ — проведенная через них прямая. Рассмотрим “забывающее” отображение $f:Z\to\mathbb{C}^{(2)}$, сопоставляющее такому набору точку $((x_1,x_2))$. Очевидно, если $x_1\neq x_2$, то через x_1 и x_2 проходит единственная прямая, то есть прообраз $f^{-1}(((x_1,x_2)))\subset Z$ состоит из одной точки. Если же $x_1=x_2$, то прямых существует много — прообраз $f^{-1}(((x_1,x_2)))\subset Z$ представляет собой множество прямых, проходящих через данную точку, то есть (как мы знаем из раздела 2) окружность. Таким образом, множество Z представляет собой четырехмерное пространство $\mathbb{C}^{(n)}=\mathbb{C}^2=\mathbb{R}^4$, где для каждой точки некоторого подмножества $U\subset\mathbb{C}^2$ эту точку вынули и на ее место вклеили “обруч”-окружность. (это — еще один пример σ-процесса, с которым мы сталкивались в разделе 1). Множество U, о котором идет речь, это множество коэффициентов (p,q) квадратных трехчленов x^2+px+q, имеющих кратный корень. Иными словами, $U\subset\mathbb{C}^2$ — алгебраическая кривая (квадрика), заданная уравнением $p^2=4q$.

Поучительно рассмотреть и другое "забывающее" отображение $g : Z \to M$, переводящее набор $(((x_1, x_2)), \ell)$ в прямую ℓ. Тем самым M это множество прямых на плоскости, гомеоморфное, как мы знаем, ленте Мебиуса без края. Отображение g устроено проще, чем f: прообразы $g^{-1}(\ell)$ всех точек устроены одинаково и представляют собой полуплоскости $\mathbb{R}^{(2)}$. Из этого, однако, не следует (и на самом деле неверно), что Z представляет собой прямое произведение ленты Мебиуса на полуплоскость. Дело в том, что отождествление множества неупорядоченных пар точек прямой ℓ с полуплоскостью можно произвести для каждой прямой ℓ в отдельности, но нельзя (непрерывным образом !) для всех прямых ℓ одновременно. Ситуация похожа на проекцию ленты Мебиуса на ее среднюю линию: средняя линия гомеоморфна окружности, множество точек с данной проекцией — отрезку, но вся лента Мебиуса это не то же самое, что $S^1 \times$ отрезок (это цилиндр).

Упражнение 3.1. Какому подмножеству S^4 соответствуют пары $(([u : v], [u : v]))$, состоящие из совпадающих точек ? А пары $(([u : v], [-\overline{v} : \overline{u}]))$, состоящие из диаметрально противоположных точек ?

4. Бо́льшие размерности

Симметрические степени множеств большей размерности (скажем, $\mathbb{R}^3$ или $\mathbb{R}^4$) не имеют такого простого описания, как симметрические степени поверхностей. Тем не менее их геометрия также очень интересна. Рассмотрим, например, множество $(\mathbb{R}^4)^{(2)} = (\mathbb{C}^2)^{(2)}$ неупорядоченных пар точек в четырехмерном пространстве. В этом случае можно рассмотреть множество Z (вещественный аналог которого изучался выше), элементами которого являются наборы $(((x_1, x_2)), \ell)$, где $x_1, x_2 \in \mathbb{C}^2$, а ℓ — проведенная через x_1, x_2 комплексная прямая. Сопоставим точке $(((x_1, x_2)), \ell)$ точку $m = (x_1 + x_2)/2 \in \mathbb{C}^2$ — середину отрезка $[x_1, x_2]$. Точка m может быть любой точкой $\mathbb{C}^2$; нетрудно видеть, что $Z = \mathbb{C}^2 \times Z_0$, где $Z_0 \subset Z$ — множество, заданное условием $m = 0$. Иными словами, элементом множества Z_0 является комплексная прямая $\ell \subset \mathbb{C}^2$, проходящая через начало координат, на которой отмечены две точки, симметричные относительно начала координат.

Множество комплексных прямых в $\mathbb{C}^2$, проходящих через начало координат это комплексная проективная прямая $\mathbb{C}P^1$, гомеоморфная, как мы уже знаем, двумерной сфере. Отождествим теперь $\mathbb{C}^2$ с $\mathbb{R}^4$ — тогда в этом пространстве можно рассматривать и вещественные прямые, проходящие через начало координат. Они образуют трехмерное проективное пространство $\mathbb{R}P^3$. Каждая такая прямая задается вектором $(a, b, c, d) \neq 0$, фиксированными с точностью до умножения на ненулевое вещественное число. Вещественному вектору $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ соответствует комплексный вектор $(a + bi, c + di) \in \mathbb{C}^2$, который, в свою очередь, определяет комплексную прямую в $\mathbb{C}^2$ (точки которой получаются умножением вектора $(a + bi, c + di)$ на ненулевые *комплексные* числа). Отсюда вытекает, через каждую вещественную прямую в $\mathbb{R}^4$ проходит ровно одна комплексная прямая, и мы определили отображение $g : \mathbb{R}P^3 \to \mathbb{C}P^1$. Для произвольной комплексной прямой ℓ прообраз $g^{-1}(\ell)$ состоит из всех вещественных прямых, проходящих через начало координат и лежащих в ℓ. Геометрически ℓ — плоскость (как $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$), так что прообраз $g^{-1}(\ell)$ гомеоморфен окружности S^1. Из сказанного, однако, не вытекает, что $\mathbb{R}P^3$ есть декартово произведение $\mathbb{C}P^1 \times S^1 = S^2 \times S^1$ — и действительно, эти пространства не гомеоморфны; ситуация та же, что с пространством Z и лентой Мебиуса в предыдущем параграфе.

Как и в вещественном случае, рассмотрим отображение $F : Z_0 \to (\mathbb{C}^2)^{(2)}$, сопоставляющее точке $(((x_1, x_2)), \ell)$ точку $((x_1, x_2))$. Разобьем Z_0 на два куска: $B = F^{-1}(((0,0)))$ и $A = Z_0 \setminus B$. Кусок B, очевидно, гомеоморфен $\mathbb{C}P^1$, то есть двумерной сфере. Что же до A, то в данном случае прямая ℓ однозначно определяется точкой $((x_1, x_2)) \in (\mathbb{C}^2)^{(2)}$, поэтому A есть множество пар диаметрально противоположных точек в $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$, отличных от начала координат. Каждой такой паре точек сопоставим положительное число t — расстояние от точек до начала координат, и вещественную прямую ϱ, через них проведенную. Очевидно, t и ϱ позволяют однозначно восстановить $((x_1, x_2))$, так что A гомеоморфно $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}P^3$. Для описания всего множества Z_0 нужно еще указать, как именно кусок B приклеен к куску A. Ответ таков (проверьте !): если $B = \mathbb{C}P^1$, а $A = \{(t, \varrho) \mid t > 0, \varrho \in \mathbb{R}P^3\}$, то при $t \to 0$ элемент $(t, \varrho) \in A$ стремится к элементу $g(\varrho) \in B$, где $g : \mathbb{R}P^3 \to \mathbb{C}P^1$ — описанное выше отображение.

Рассмотрим теперь отображение $G : Z_0 \to \mathbb{C}P^1$, переводящее $(((x_1, x_2)), \ell) \mapsto \ell$. Для произвольной прямой ℓ прообраз $G^{-1}(\ell)$ представляет собой множество пар диаметрально противоположных точек на ℓ. Мы можем отождествить прямую ℓ с множеством $\mathbb{C}$, и тогда $f^{-1}(\ell)$ будет гомеоморфен множеству пар $((z, -z))$ противоположных комплексных чисел. Возводя их в квадрат, получим, что множество таких пар само гомеоморфно $\mathbb{C}$ (это, как нетрудно заметить, частный случай отождествления $\mathbb{C}^{(2)} = \mathbb{C}^2$). Однако, как и раньше, $Z_0 \neq \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}^2$, поскольку нельзя отождествить пространство пар точек на прямой ℓ с $\mathbb{C}^2$ для всех прямых ℓ сразу. Это отождествление, однако, можно сделать локально (для всех прямых ℓ, достаточно близких к какой-нибудь заданной прямой). Поэтому из полученной картины вытекает очень важное свойство Z_0 (и, следовательно, Z): *гладкость*. Гладкость означает, что в достаточно малой окрестности произвольной точки Z “выглядит”, как n-мерное пространство $\mathbb{R}^n$ (в данном случае $n = 6$). Точнее говоря, для произвольной точки на Z в некоторой ее окрестности можно ввести 6 координат, описывающих точки этой окрестности однозначно. В качестве координат здесь можно взять какие-нибудь координаты на двумерной сфере (в окрестности нужной точки) — например, широту и долготу — и плюс еще любые координаты (4 штуки) в $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$.

Рассмотрим теперь просто множество $(\mathbb{C}^2)^{(2)}$ неупорядоченных пар точек на $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$. Как и для множества Z, можно положить $(\mathbb{C}^2)^{(2)} = N_0 \times \mathbb{C}^2$, где $N_0 \subset (\mathbb{C}^2)^{(2)}$ — множество пар точек, центр тяжести которых (середина отрезка) лежит в начале координат. Очевидно, $F(Z_0) = N_0$, где F — определенное выше отображение, “забывающее” прямую и оставляющее лишь пару точек. Для точек $p = ((x_1, x_2)) \in N_0$, $x_1 \neq x_2$, прообраз $F^{-1}(p)$ состоит ровно из одной точки, лежащей, в приведенных выше обозначениях, в подмножестве A. Для точки вида $((0,0))$ прообраз представляет собой целую сферу B. Следовательно, множество N_0 получается из гладкого множества Z_0 стягиванием сферы B в одну точку. Множество N_0 гладким не является.

Упражнение 4.1 (довольно трудное, для тех, кто знает, что такое “идеал” и “фактор по идеалу”)**.** Докажите, что множество Z есть множество таких идеалов $J \subset \mathbb{C}[x, y]$ в кольце многочленов от 2 переменных, что фактор $\mathbb{C}[x, y]/J$

имеет размерность 2. Подсказка: если $x_1 \neq x_2$ (и, тем самым, x_1 и x_2 определяют элемент $((\!(x_1, x_2)\!), \ell)$ однозначно), то J состоит из всех многочленов, обращающихся в нуль в точках x_1 и x_2.

5. Тройки различных точек на плоскости

Рассмотрим соответствие $e : \mathbb{C}^{(n)} \to \mathbb{C}^n$, описанное в параграфе 3, более подробно в случае $n = 3$. Напомним, что элементами пространства $\mathbb{C}^{(3)}$ являются неупорядоченные тройки комплексных чисел $(\!(z_1, z_2, z_3)\!)$, а элементами пространства $\mathbb{C}^3$ — упорядоченные: (e_1, e_2, e_3). Неупорядоченной тройке $(\!(z_1, z_2, z_3)\!)$ сопоставляется тройка $e_1 = z_1 + z_2 + z_3$, $e_2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3$, $e_3 = z_1 z_2 z_3$ коэффициентов многочлена $P(t) = (t + z_1)(t + z_2)(t + z_3) = t^3 + e_1 t^2 + e_2 t + e_3$.

Рассмотрим теперь множество $N \subset \mathbb{C}^{(3)}$ неупорядоченных троек *попарно различных* точек в $\mathbb{C}$. При отображении e множество N переходит в подмножество $\mathbb{C}^3$, состоящее из троек (e_1, e_2, e_3) комплексных чисел, таких что многочлен $t^3 + e_1 t^2 + e_2 t + e_3$ не имеет кратных корней.

Опишем множество N подробнее. Прежде всего, тройке точек $(\!(z_1, z_2, z_3)\!) \in \mathbb{C}^{(3)}$ можно сопоставить тройку $(\!(w_1, w_2, w_3)\!) = (\!(z_1 - e_1/3, z_2 - e_1/3, z_3 - e_1/3)\!)$. Тройка $(\!(w_1, w_2, w_3)\!)$ по-прежнему лежит в N и обладает тем свойством, что $w_1 + w_2 + w_3 = 0$. Если известно число e_1 и тройка $(\!(w_1, w_2, w_3)\!)$, то тройка $(\!(z_1, z_2, z_3)\!)$ восстанавливается однозначно. Таким образом, $N = \mathbb{C} \times N_0$, где N_0 состоит из троек попарно различных точек с суммой 0 — геометрически это означает, что центр тяжести треугольника $z_1 z_2 z_3$, где $(\!(z_1, z_2, z_3)\!) \in N_0$, лежит в начале координат. При отображении e множество N_0 переходит в множество пар (e_2, e_3) комплексных чисел, для которых все корни многочлена $P(t) = t^3 + e_2 t + e_3$ простые.

Простота всех корней означает, что многочлен не имеет общих корней с собственной производной. В данном случае $P'(t) = 3t^2 + e_2$, и корни производной $t = \pm\sqrt{-e_2/3}$. Таким образом, должно быть $-e_2/3\sqrt{-e_2/3} + e_2\sqrt{-e_2/3} \neq \pm e_3$, то есть $e_3^2 + 4e_2^3/27 \neq 0$. Константа $4/27$ нам неудобна, но ее можно исправить заменой координат: сделаем преобразование $e_3 \mapsto e_3 \cdot \frac{2^{5/4}}{3^{3/2}}$ (а e_2 оставим прежним), тогда неравенство примет вид $\sqrt{2}e_3^2 + e_2^3 \neq 0$ (почему так удобно, станет скоро понятно). То есть, N_0 гомеоморфно множеству $\mathbb{C}^2 \setminus U$, где U — алгебраическая кривая с уравнением $\sqrt{2}e_3^2 + e_2^3 = 0$ — отождествим их, и будем просто считать, что $N_0 = \mathbb{C}^2 \setminus U$.

Через каждую точку $(e_2, e_3) \in \mathbb{C}^2$ (кроме $(0, 0)$) можно провести единственный "криволинейный луч", состоящий из всех точек с координатами $(t^2 e_2, t^3 e_3)$, $t > 0$. Очевидно, если $(e_2, e_3) \in N_0$, то и весь "луч" лежит в N_0. Всякий "луч" пересекает единичную сферу $S^3 = \{(e_2 = x + iy, e_3 = u + iv) \in \mathbb{C}^2 \mid x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = |e_2|^2 + |e_3|^2 = 1\}$ в единственной точке. Возьмем произвольную точку $a = (e_2, e_3) \in N_0$ и пусть $b = (t^2 e_2, t^3 e_3) \in V = S^3 \cap N_0$, $t > 0$. Если известны b и t, то a восстанавливается однозначно. Следовательно, N_0 гомеоморфно произведению $\mathbb{R}_+ \times V$, где $\mathbb{R}_+$ — множество положительных чисел (луч). Нетрудно видеть, что луч гомеоморфен прямой, так что $N_0 = V \times \mathbb{R}$.

Точки $(e_2, e_3) \in S^3 \cap U$ удовлетворяют уравнениям $\sqrt{2}e_3^2 = -e_2^3$ и $|e_2|^2 + |e_3|^2 = 1$, откуда следует, что $|e_2| = |e_3| = 1/\sqrt{2}$ (для этого мы и подбирали константу $\sqrt{2}$). Множество комплексных чисел z таких, что $|z| = 1/\sqrt{2}$, представляет собой окружность, а множество пар (e_2, e_3) комплексных чисел таких, что $|e_2| = |e_3| = 1/\sqrt{2}$ — прямое произведение двух окружностей, то есть двумерный тор. Этот тор целиком лежит в сфере S^3, поскольку если $|e_2| = |e_3| = 1/\sqrt{2}$, то $|e_2|^2 + |e_3|^2 = 1$. То есть пересечение $S^3 \cap U$ — подмножество лежащего в S^3 двумерного тора, а $V = S^3 \setminus S^3 \cap U$ — трехмерная сфера, из которого это подмножество удалили.

Опишем множество $S^3 \cap U$. Поскольку $|e_2| = 1/\sqrt{2}$, можно записать $e_2 = e^{i\varphi}/2$, и тогда $e_3 = -\sqrt{2}(e_2)^{3/2} = -e^{3i\varphi/2}/2$. Параметр φ может принимать любое значение от 0 до 2π; при изменении φ на 2π точка e_2 пробегает параллель тора. При этом точка e_3 делает *полтора* оборота вокруг меридиана тора. Повторив это дважды, получим на торе замкнутую линию — $(3,2)$-обмотку (3 оборота в направлении меридиана, 2 в направлении параллели). Эта обмотка и есть пересечение $S^3 \cap U$, а дополнение до нее — множество $V = N_0 \cap S^3$.

Чтобы лучше представить себе эту обмотку, рассмотрим положение тора $T = \{(e_2, e_3) \mid |e_2| = |e_3| = 1/\sqrt{2}\}$ внутри сферы $S^3 = \{(e_2, e_3) \mid |e_2|^2 + |e_3|^2 = 1\}$. Очевидно, тор делит сферу на две части: в одной из них $|e_2|^2 \le 1/2 \le |e_3|^2$, а в другой наоборот. Если (e_2, e_3) лежит в первой части, то число e_2 лежит на комплексной плоскости в круге D радиуса $1/\sqrt{2}$ с центром в начале координат. Что касается e_3, то оно отлично от нуля и поэтому его можно однозначно записать в тригонометрической форме: $e_3 = \varrho e^{i\varphi}$, где $0 \le \varphi \le 2\pi$, а модуль $\varrho = |e_3| = \sqrt{1 - |e_2|^2}$ однозначно определяется числом e_2. Пара (e_2, e_3), таким образом, однозначно определяется точкой круга D и параметром φ, лежащим на окружности S^1. Следовательно, первая часть сферы гомеоморфна $D^2 \times S^1$ — полноторию. В силу симметрии, полноторию гомеоморфна также и вторая часть. То есть трехмерная сфера получается склейкой двух полноторий по общей границе — тору. Поскольку во второй части $e_2 \ne 0$, а e_3 лежит в круге, эти два полнотория склеиваются “крест-накрест”: параллель границы одного полнотория приклеивается к меридиану границы другого, и наоборот.

Сферу S^3 можно представить себе и по-другому — как обычное трехмерное пространство $\mathbb{R}^3$, дополненное одной бесконечно удаленной точкой (точно так же окружность — прямая плюс одна точка ∞, а двумерная сфера — плоскость плюс одна точка). Рассмотрим теперь стандартное полноторие в $\mathbb{R}^3$ (спасательный круг, вместе с внутренностью). Оно изображено на рисунке 5.1 (заштрихованные круги получены пересечением полнотория с вертикальной плоскостью; полноторие можно восстановить, вращая рисунок в пространстве вокруг прямой AB). Незаштрихованная область представлена как объединение семейства окружностей и прямой AB; так можно поступить в любой плоскости, проходящей через AB (а не только в плоскости рисунка). Тем самым, дополнение $\mathbb{R}^3$ до полнотория разбивается на прямую AB и семейство окружностей. Каждая такая окружность (и прямая AB тоже) пересекает в единственной точке круг D, полученный вращением отрезка PQ вокруг прямой AB. Следовательно, внешняя часть “спасательного круга” — тоже полноторие (произведение $S^1 \times D$), только с одной выкинутой точкой (выкинутой потому, что AB — прямая, а не окружность, как все остальные).

Таким образом, получается, что если из сферы S^3, разбитой тором на два полнотория, выкинуть одну точку (не лежащую на торе), то получится как раз трехмерное пространство с вложенным в него “спасательным кругом”.

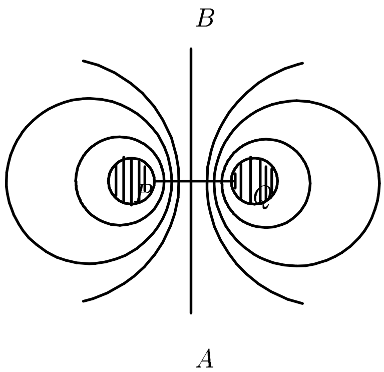

Рис. 5.1. Дополнение к полноторию — полноторие

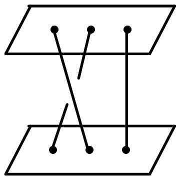

Рис. 5.2. Коса из 3 нитей

Поэтому обмотка $S^3 \cap U$ представляется теперь линией на поверхности спасательного круга, обходящей его по параллели дважды, а по меридиану — трижды. Эта линия заузлена — если сделать ее из веревки, а потом спасательный круг каким-то образом убрать, то веревку все равно не удастся распутать, то есть превратить в простое веревочное кольцо. Получившийся узел называется "трилистником". Таким образом, множество V гомеоморфно трехмерной сфере с выкинутым из нее узлом трилистник, а исходное множество N неупорядоченных троек попарно различных точек в $\mathbb{R}^3$ гомеоморфно $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times (S^3 \setminus \text{трилистник})$ (напомним еще раз, что $\mathbb{R}^2$ возникает за счет фиксации центра тяжести, $\mathbb{R}$ — за счет движения по "криволинейному лучу").

Рассмотрим теперь в множестве N попарно различных троек точек кривые γ, начинающиеся и кончающиеся в некоторой заранее фиксированной точке $A = (\!(z_1, z_2, z_3)\!)$. Две кривые γ_0 и γ_1 будем считать одинаковыми, если одну можно продеформировать в другую — то есть существует семейство γ_t, $0 \leq t \leq 1$, в котором каждая γ_t — кривая, начинающаяся и кончающаяся в точке A (и зависимость от параметра t непрерывная). Каждая кривая γ представляет собой тройку кривых (по одной для каждой точки z_i): $u_1(s), u_2(s), u_3(s)$ (здесь $s \in [0,1]$ — параметр-"время", описывающий движение точки вдоль кривой). Начальная точка кривой $u_i(0) = z_i$ $(i = 1,2,3)$, конечная $u_i(1)$ — одна из точек z_1, z_2, z_3 (но не обязательно z_i — тройка не упорядочена !), и при всех $s \in [0,1]$ точки $u_1(s), u_2(s), u_3(s)$ попарно различны. Если нарисовать в $\mathbb{R}^3$ развертки кривых $\{(u_i(s), s), s \in [0,1]\}$, то получится картинка, похожая на рисунок 5.2. Такие картинки называются *косами* (из трех нитей).

Упражнение 5.1. а) Докажите, что косу на рис. 5.2 можно продеформировать в кривую, лежащую целиком в множестве $V = S^3 \setminus U$. б) V гомеоморфно трехмерной сфере без узла трилистник. Представьте полученную кривую в виде кривой в трехмерном пространстве, не пересекающей трилистник.