Геометрия, топология и комбинаторика разветвленных накрытий сферы

М.Э.Казарян

Аннотация

Всякую мероморфную функцию комплексного аргумента, например, многочлен, можно представлять себе как топологическое накрытие над сферой Римана, разветвленное над конечным множеством критических значений. Комбинаторика разветвленных накрытий играет важную роль в современной математической физике. Она связана, с одной стороны, с перечислительными задачами теории графов, а с другой - с топологией пространств модулей комплексных структур на римановых поверхностях. Все утверждения, которые будут сформулированы в курсе, элементарны и имеют комбинаторную формулировку. Однако известные мне доказательства большинства из них требуют привлечения геометрических и топологических методов, далеко выходящих за рамки школьной математики. Я надеюсь привлечь участников занятий к поиску элементарных доказательств сформулированных теорем и гипотез. Более подробно познакомиться с теорией разветвленных накрытий сферы можно на учебно-исследовательском семинаре НМУ под руководством М.Э. Казаряна и С.К. Ландо.

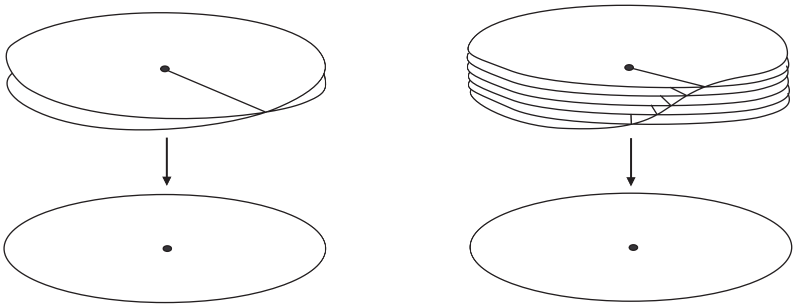
1. Топология многочленов

Один из основных объектов наших исследований — многочлен P с комплексными коэффициентами от одной переменной x:

$$P(x) = x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \cdots + a_0.$$

Обычно многочлен является предметом исследования алгебры. Мы же посмотрим на него с топологической точки зрения: как устроено отображение $x \mapsto P(x)$ комплексной прямой $\mathbb{C}$ в себя?

Рассмотрим вначале простейший случай многочлена $P(x) = x^2$. При возведении в квадрат аргумент комплексного числа удваивается, поэтому отображение $x \mapsto x^2$ «обматывает» комплексную плоскость дважды вокруг начала координат. У точки 0 при этом отображении прообразом также является точка 0, а у всякой точки y, отличной от нуля, имеется ровно два прообраза, которые переставляются между собой при обходе точки y вокруг начала координат. Таким образом,



а) $x \mapsto x^2$ б) $x \mapsto x^n$

Рис. 1. Точка ветвления накрытия

отображение $x \mapsto x^2$ является топологическим накрытием степени 2 комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с ветвлением в начале координат. Это накрытие условно изображено на рис. 1а. Поверхность накрытия, изображенная на этом рисунке, имеет особенность в начале координат и линию самопересечения. В действительности, эта поверхность гладкая (поскольку она совпадает с комплексной плоскостью $\mathbb{C}$), а особенности возникают на рисунке в следствии ограниченности нашего трехмерного пространства.

Похожим образом устроено отображение $x \mapsto x^n$ для произвольного натурального n. Это отображение является топологическим n-листным накрытием, разветвленным в начале координат. У всякой точки y вне начала координат отображение имеет ровно n прообразов, являющихся корнями степени n из y. При обходе точки y вокруг начала координат эти корни переставляются циклически (см. рис. 1б).

Пусть теперь P — произвольный многочлен степени n. Рассмотрим его поведение в окрестности некоторой точки x_0. Для простоты, мы будем предполагать, что $x_0 = P(x_0) = 0$ (этого можно легко добиться сдвигом координат в плоскостях $\mathbb{C}$ областей определения и значения отображения P). Представим многочлен в виде

$$P(x) = a_k\, x^k + a_{k+1}\, x^{k+1} + \dots + a_n\, x^n = x^k(a_k + a_{k+1}\, x + \dots), \qquad a_k \neq 0.$$

Поскольку $a_k \neq 0$, из выражения, стоящего в скобках, можно извлечь непрерывно зависящий от x корень k-й степени. Это можно сделать k разными способами. Выберем любой из них и обозначим получившуюся функцию через $\sqrt[k]{a_k + a_{k+1}\, x + \dots}$. Поскольку эта функция отлична от нуля в начале координат, отображение $\tilde{x} = x\, \sqrt[k]{a_k + a_{k+1}\, x + \dots}$ является взаимно однозначной голоморфной заменой координат окрестности точки $x_0 = 0$. В новой координате отображение P принимает простой вид

$$P(\tilde{x}) = \tilde{x}^k,$$

изученный выше. При $k = 1$ отображение P взаимно однозначно в окрестности точки x_0, а при $k > 1$ в этой точке отображение P имеет ветвление порядка k.

Точки x_0, в которых $k > 1$, называются *критическими*. Заметим, что они в точности соответствуют нулям производной P'. Значение многочлена P в какой-либо его критической точке называется *критическим значением*. Таким образом, топологически P является разветвленным накрытием комплексной плоскости $\mathbb{C}$, разветвленным в критических значениях. Для всякого некритического значения y отображение P имеет имеет ровно n различных прообразов, соответствующих различным корням уравнения $P(x) - y = 0$; для критического значения y уравнение $P(x) - y = 0$ имеет кратные корни, и кратности этих корней равны порядкам ветвления накрытия P в соответствующих точках.

В топологии часто удобнее иметь дело с компактными пространствами. Естественной компактификацией комплексной плоскости $\mathbb{C}$ является сфера Римана $S^2 = \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Сферу Римана удобно рассматривать как одномерное комплексное многообразие, все точки которого абсолютно равноправны, а «особое положение» точки ∞ происходит вследствие частного выбора карты с комплексной координатой x. Выбор координаты имеет вспомогательную роль. В другой координате, скажем, $w = 1/x$ та же точка ∞ будет изображаться уже в конечной области значений комплексной переменной w.

Отображение $x \mapsto P(x)$ естественно продолжается до отображения сфер Римана условием $\infty \mapsto \infty$. Несложно вычислить поведение пополненного отображения в окрестности бесконечности:

$$\frac{1}{P(x)} = \frac{1}{x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0} = w^n \frac{1}{1 + a_{n-1}\, w + \cdots + a_0\, w^n}, \qquad w = \frac{1}{x}.$$

Поскольку знаменатель во втором множителе отличен от нуля в окрестности рассматриваемой точки $w = 0$, из него можно извлечь непрерывно зависящий от w корень n-й степени (это можно сделать n разными способами). Следовательно, после подходящей замены координат отображение в окрестности рассматриваемой точки $x = \infty$ принимает вид $\tilde{w} \mapsto \tilde{w}^n$. Таким образом, пополненное отображение $P : S^2 \to S^2$ голоморфно и имеет в бесконечности ветвление порядка n.

Для простоты будем считать, что все конечные критические точки отображения P, соответствующие корням производной P', простые (порядок ветвления в простой критической точке равен 2). Более того, критические значения, отвечающие различным критическим точкам, различны.

Определение 1 *Топологическим многочленом* степени n называется n-листное разветвленное накрытие сферы $P : C \to S^2$ гладкой компактной поверхнтстью C, имеющее ровно n точек ветвления, обозначаемых через $z_1, \ldots, z_{n-1}, \infty$. Вне точек ветвления каждый из n листов накрытия отображается локально взаимно однозначно на область значений накрытия, у точки ∞ имеется единственный прообраз с ветвлением порядка n, а у каждой из точек $z_1, \ldots, z_{n-1}$ имеется по $n - 1$ прообразов, в одном из которых накрытие имеет ветвление порядка 2, а в остальных $n - 2$ прообразах отображение неразветвлено.

Из топологических соображений (см. ниже) следует, что поверхность C накрытия, задаваемого топологическим многочленом, гомеоморфна сфере. Более того, по теореме Римана, на этой сфере можно выбрать голоморфную координату x, в которой отображение P действительно задается многочленом. Такая координата не единственна. Ее растяжением можно добиться того, чтобы коэффициент при старшем члене x^n стал равным единице. Далее, сделав подходящий сдвиг $x \mapsto x - a$, можно обратить в ноль коэффициент a_{n-1} при члене x^{n-1}. В результате получится многочлен вида

$$P(x) = x^n + a_{n-2}\, x^{n-2} + \cdots + a_0. \tag{1}$$

Оставшаяся свобода — это возможность умножения координаты x на произвольный корень n-й степени из единицы. Такая замена приводит к некоторому преобразованию коэффициентов $a_0, \ldots, a_{n-2}$ многочлена P. Сформулируем вывод в виде утверждения.

Предложение 2 *Всякий топологический многочлен задается при выборе подходящей координаты x на поверхности накрытия настоящим многочленом* (1). *Набор коэффициентов $a_0, \ldots, a_{n-2}$ этого многочлена определен однозначно с точностью до n возможностей.*

2. Количество топологических многочленов

Обозначим через h_n количество топологически различных топологических многочленов степени n с фиксированными заранее выбранными попарно различными критическими значениями $z_1, \ldots, z_{n-1}$. Иными словами, $n\, h_n$ — это количество многочленов (1), имеющих данный набор критических значений. Это количество не зависит, очевидно, от положения точек z_i.

Теорема 3 $h_n = n^{n-3}$ $(n \geq 3)$.

Мы приведем три доказательства этой теоремы. Первое из них комбинаторное. Оно сводит задачу перечисления топологических многочленов к теореме А. Кэли о перечислении деревьев. Второе, хотя и ссылается на теорему из комплексного анализа, также является, по существу, комбинаторным. Наконец, третье, топологическое доказательство, принадлежащее В. И. Арнольду, основано на вычислении степени квазиоднородного отображения. Соображения, применяемые во всех доказательствах, имеют далекие обобщения. Интересно отметить, тем не менее, что случай топологических многочленов — один из немногих, в которых комбинаторные и топологические методы применимы одинаково успешно. Во многих других случаях топологические идеи приводят к нетривиальным комбинаторным утверждениям, и обратно, простые комбинаторные соображения приводят к загадочным топологическим результатам.

Для начала приведем более явную комбинаторную формулировку задачи перечисления топологических многочленов. Рассмотрим замкнутый путь γ на сфере, проходящий вне критических значений. Каждой точке пути соответствует n различных прообразов, непрерывно зависящих от этой точки. При обходе вдоль

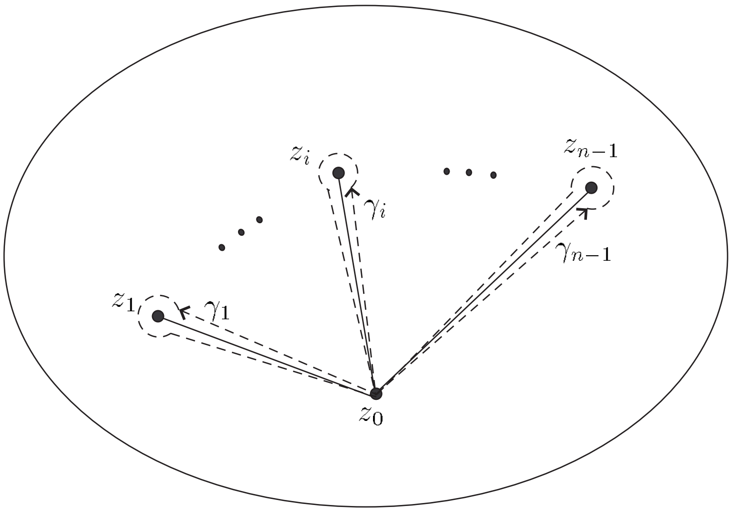


Рис. 2. Пути γ_i, задающие монодромию накрытия

пути прообразы начальной точки возвращаются на свое место, однако порядок этих прообразов может измениться. Полученная перестановка множества из n прообразов начальной точки пути называется *монодромией* накрытия вдоль пути γ. Поскольку монодромия — дискретное преобразование, она не меняется при непрерывной деформации пути. Топологический тип многочлена определяется монодромией вдоль всевозможных путей на сфере, не проходящих через критические значения.

Зафиксируем некоторое некритическое значение z_0 и соединим его отрезками со всеми конечными критическими значениями $z_1, \ldots, z_{n-1}$. При этом мы будем предполагать, что эти отрезки пересекаются только в точке z_0, см. рис. 2. Обозначим через γ_i путь с началом и концом в z_0, который идет вдоль i-го отрезка, немного недоходя до точки z_i, затем обходит эту точку один раз против часовой стрелки, а затем возвращается вдоль этого же отрезка обратно в исходную точку z_0. Обозначим через s_i монодромию вдоль пути γ_i. Заметим, что все перестановки $s_1, \ldots, s_{n-1}$ принадлежат одной и той же группе S_n перестановок из n прообразов точки z_0.

Ясно, что набор перестановок $s_1, \ldots, s_{n-1}$ полностью определяет топологический тип многочлена (формально, это следует из того, что набор элементарных путей $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$ порождает фундаментальную группу $\pi_1(S^2 \setminus \{z_1, \ldots, z_{n-1}, \infty\})$ дополнения множества критических значений накрытия).

Из определения перестановок s_i ясно, что их тип определяется поведением накрытия в окрестности точек z_i. Из изученного уже поведения отображения в окрестности простой критической точки следует, что перестановка s_i переставляет между собой два из n элементов, оставляя каждый из остальных на месте. Иными словами, s_i — транспозиция. Кроме того, последовательный обход вдоль путей $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$ эквивалентен одному обходу вдоль окружности большого радиуса вокруг всех критических значений, то есть обходу вокруг точки ∞ на сфере Римана. Монодромия, соответствующая такому обходу, является циклической перестановкой. Мы приходим к следующей теоретико-групповой переформулировке рассматриваемой задачи.

Предложение 4 *Число $n!\,h_n$ равно количеству наборов из $n-1$ транспозиций $(s_1, \ldots, s_{n-1})$ в группе S_n, таких, что их произведение $s_1 \cdots s_{n-1}$ является циклической перестановкой.*

Множитель $n!$ возник из-за необходимости упорядочить n прообразов точки z_0, при этом накрытия, отличающиеся только нумерацией этих прообразов, являются топологически эквивалентными.

Сопоставим всякому набору $(s_1, \ldots, s_{n-1})$ транспозиций граф с n вершинами и $n-1$ ребрами, вершины которого соответствуют переставляемым элементам, а ребра — парам переставляемых транспозициями элементов.

Задача 5 Докажите, произведение (в любом порядке) $n-1$ транспозиций является циклической перестановкой тогда и только тогда, когда граф, сопоставляемый этому набору транспозиций, является деревом. (Указание: условие того, что граф из n вершин и $n-1$ ребер является деревом эквивалентно тому, что он связен.)

Дерево, сопоставляемое топологическому многочлену, имеет следующую наглядную геометрическую реализацию. Оно естественно вложено в поверхность накрытия. Вершинами графа являются прообразы точки z_0. Ребра строятся следующим образом. Рассмотрим полный прообраз отрезка, соединяющего точки z_0 и z_i. Этот прообраз состоит из $n-2$ дуг, соединяющих некоторые точки из прообраза z_0 с некритическими прообразами точки z_i, и еще двух дуг, соединяющие оставшиеся два прообраза z_0 с критической точкой накрытия. Объединение двух последних дуг и является искомым ребром дерева.

Занумеруем ребра построенного дерева в соответствии с выбранной заранее нумерацией критических значений z_i. Нетрудно видеть, что сопоставление топологическому многочлену дерева с занумерованными ребрами является взаимно однозначным:

число h_n равно количеству деревьев с n вершинами и занумерованными ребрами.

Задача 6 Посчитайте числа h_n при $n \leq 6$.

Если дерево уже выбрано, то занумеровать его $n-1$ ребер можно $(n-1)!$ способами. Конечно, некоторые из полученных нумераций могут оказаться эквивалентными, если у исходного дерева имелись автоморфизмы (перестановки вершин, оставляющие на месте ребра). Поэтому в действительности каждому дереву Γ соответствует $(n-1)!/|\operatorname{Aut}(\Gamma)|$ неэквивалентных нумераций его вершин, где $\operatorname{Aut}(\Gamma)$ — группа автоморфизмов дерева, а $|\operatorname{Aut}(\Gamma)|$ — количество ее элементов.

Отсюда мы получаем равенство

$$\frac{h_n}{(n-1)!} = \sum_{\substack{\text{Деревья } \Gamma \text{ с} \\ n \text{ вершинами}}} \frac{1}{|\operatorname{Aut}(\Gamma)|}.$$

Деревья с небольшим числом вершин нетрудно перечислить. (Сделайте это!) Отсюда получаются, в частности, следующие равенства:

$$\begin{aligned}
\frac{h_2}{1} &= 1/2,\\
\frac{h_3}{2} &= \frac{1}{2},\\
\frac{h_4}{6} &= \frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6},\\
\frac{h_5}{24} &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{24}=\frac{25}{24},\\
\frac{h_6}{120} &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{120}=\frac{6^3}{120},
\end{aligned}$$

что согласуется с утверждением теоремы 3. Таким образом, при правильном учете порядков групп автоморфизмов, перечислять можно и деревья с ненумерованными ребрами, а нумерация ребер нужна лишь для того, чтобы «убить» автоморфизмы. Единственное дерево с нумерованными ребрами, имеющее нетривиальные автоморфизмы, это дерево с двумя вершинами. Заметим, что единственный топологический многочлен степени два также имеет нетривиальный автоморфизм (переставляющий два листа накрытия). Такое накрытие также следует учитывать с весом $1/2$ в определении числа h_2. Таким образом, при правильном определении числа $h_2 = 1/2$ утверждение теоремы справедливо и при $n = 2$.

3. Теорема Кэли о перечислении деревьев

«Убить» автоморфизмы дерева можно и другим способом, например, занумеровав его вершины. Из соображений, аналогичных приведенным выше, мы получаем:

число $n\,h_n$ равно количеству деревьев с n занумерованными вершинами.

Следовательно, теорема 3 равносильна следующей.

Теорема 7 (Кэли) *Число деревьев с n занумерованными вершинами равно n^{n-2}.*

Имеется прямой комбинаторный способ кодировать дерево с занумерованными вершинами последовательностью из $n-2$ чисел от 1 до n (я благодарен В.Доценко, объяснившему мне этот способ; см. его лекции на этой же школе).

Способ состоит в следующем. Назовем листом дерева его вершину, из которой выходит ровно одно ребро. Рассмотрим дерево с занумерованными вершинами. Выберем среди его листьев лист с максимальным номером, запишем номер вершины, с которой этот лист соединен, и сотрем лист вместе с выходящим из него ребром. В оставшемся дереве опять рассмотрим все листья, выберем из них лист с максимальным номером, запишем номер вершины, с которой он соединен, и сотрем лист вместе с выходящим из него ребром. Продолжая таким же образом, мы получим в результате последовательность из $n-2$ чисел из интервала от 1 до n. Построенное соответствие является взаимно однозначным (это вовсе не очевидно!), что и доказывает теорему Кэли, а вместе с ней, и теорему 3.

4. Теорема обращения Лагранжа

Еще один способ перечисления деревьев состоит в следующем. Назовем *корневым деревом* дерево, у которого выделена одна из его вершин. Выделенная вершина называется *корнем.* В группу автоморфизмов корневого дерева входят только те автоморфизмы дерева, которые оставляют корень на месте. Выделение корня уменьшает количество автоморфизмов, однако в общем случае полностью их не убивает, поэтому перечислять корневые деревья нужно с учетом их автоморфизмов. Обозначим через r_n количество корневых деревьев с n вершинами, посчитанных с весами, обратными порядкам групп автоморфизмов. Соображения, аналогичные приведенным выше, приводят к следующей формуле.

$$r_n = \frac{n\,h_n}{(n-1)!} = \sum_{\substack{\text{Корневые деревья}\\ \Gamma \text{ с } n \text{ вершинами}}} \frac{1}{|\operatorname{Aut}(\Gamma)|}.$$

Для перечисления корневых деревьев можно воспользоваться следующей рекуррентной формулой. Предположим, что корень некоторого корневого дерева соединен ребрами с k другими вершинами. При удалении корня дерево распадается на k меньших деревьев, у каждого из которых в качестве корня можно выбрать ту вершину, которая была соединена с корнем исходного дерева (см. рис. 3).

Учет автоморфизмов всех возникающих в при этом преобразовании деревьев приводит к следующему соотношению:

$$r_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} \sum_{n_1+\dots+n_k=n-1} r_{n_1}\dots r_{n_k}.$$

Во второй сумме суммирование ведется по всевозможным упорядоченным последовательностям $(n_1,\dots,n_k)$ натуральных чисел, сумма которых равна $n-1$.

Приведенное соотношение удобно записать при помощи производящих функций. Введем следующий формальный ряд от независимой переменной q,

$$Y(q) = \sum_{n\ge 1} r_n\, q^n.$$

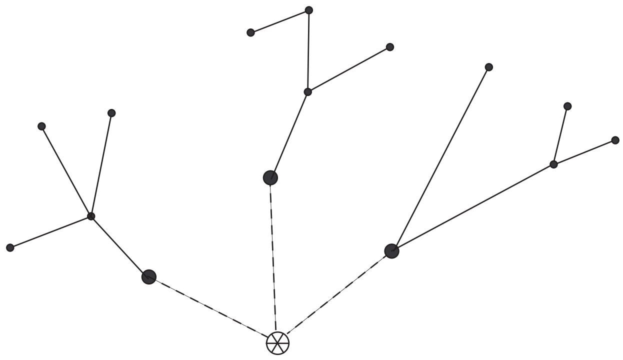


Рис. 3. Корневые деревья, полученные удалением корня исходного дерева

Тогда в терминах этого ряда приведенное рекуррентное соотношение принимает вид функционального уравнения

$$Y = q\,(1 + Y + \frac{Y^2}{2!} + \frac{Y^3}{3!} + \dots) = q\,e^Y.$$

Иными словами, функция $Y(q)$ является обратной к функции

$$q(Y) = Y\,e^{-Y} = Y - Y^2 + \frac{Y^3}{2!} + \frac{Y^4}{3!} - \dots.$$

Отметим, что, как нетрудно проверить, ряд $Y(q)$ сходится в окрестности начала координат, однако мы этот факт никак не используем, рассматривая ряд формально и находя его коэффициенты по индукции шаг за шагом.

Таким образом, теорема 3 и теорема Кэли равносильны следующей.

Теорема 8 (Лагранж) *Коэффициенты Тейлора r_n степенного ряда $Y(q)$, обратного ряду $q(Y) = Y\,e^{-Y}$, задаются явной формулой*

$$r_n = \frac{n^{n-1}}{n!}.$$

Доказательство. Пусть задана дифференциальная форма $\omega = f(q)\,dq$, у которой коэффициент — произвольный ряд вида

$$f(q) = a_{-k}q^{-k} + \dots + a_{-1}q^{-1} + a_0 + a_1 q + \dots$$

(такой ряд называется *рядом Лорана*, а такая форма называется *мероморфной*). *Вычетом* формы ω называется ее коэффициент при $\frac{dq}{q}$:

$$\operatorname{res} f(q)\,dq = a_{-1}.$$

Доказательство теоремы Лагранжа основана на том, что *вычет мероморфной формы не зависит от выбора голоморфной координаты*. Дело в том, что у вычета имеется инвариантное интегральное представление

$$\operatorname{res}\omega = \frac{1}{2\,\pi\,i}\oint \omega,$$

где интегрирование проводится по маленькой окружности, обходящей начало координат в комплексной плоскости (действительно, интеграл $\oint q^k dq$ обращается в ноль для любого целого $k \neq -1$, и равен $2\pi i$ при $k = 1$). Замечу, что инвариантность вычета при замене координаты означает для коэффиицентов формы нетривиальное комбинаторное утверждение, которое не так-то просто доказать напрямую.

Используя инвариантность вычета, мы легко находим

$$r_n = \operatorname{res} \frac{Y}{q^{n+1}} dq = \operatorname{res} \frac{e^{(n+1)Y}}{Y^n} d(Y\, e^{-Y}) = \operatorname{res} \frac{1-Y}{Y^n} e^{n\,Y}\, dY =$$

$$= \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{n^{n-2}}{(n-2)!} = \frac{n^{n-1}}{n!}.$$

Теорема доказана.

5. Степень квазиоднородного отображения

Сопоставим всякому многочлену (1) неупорядоченный набор его $n-1$ критических значений. Этот набор значений $(z_1, \ldots, z_{n-1})$ удобно кодировать коэффициентами b_j многочлена

$$R(t) = (t - z_1) \ldots (t - z_{n-1}) = t^{n-1} + b_{n-2}\, t^{n-2} + \cdots + b_0. \tag{2}$$

Построенное отображение $\lambda : \mathbb{C}^{n-1} \to \mathbb{C}^{n-1}$ пространства многочленов (1) с координатами a_i в пространство многочленов (2) с координатами b_i в теории особенностей называется *отображением Ляшко-Лойенги.*

Формально, приведенное выше определение отображения λ применимо только для тех многочленов P, у которых все критические точки (т.е. корни производной) различны. На самом же деле оно продолжается непрерывным и даже гладким образом на всю область своего определения. Более того, это отображения полиномиально (b_j выражаются как многочлены от a_i). Более алгебраическое определение определение этого отображения состоит в том, что R является результантом

$$R(t) = \operatorname{Res}_x(P'(x), P(x) - t).$$

Иными словами, уравнение $R(t) = 0$ получается из системы уравнений $P'(x) = P(x) - t = 0$ исключением переменной x.

Задача 9 Вычислите явно отображение λ для $n = 2, 3, 4$ исходя из обоих определений.

Многочлены P с одинаковыми критическими значениями образуют полный прообраз одной точки отображения λ. Поскольку каждому топологическому многочлену соответствует n его реализаций в виде обычного многочлена, *число $n\,h_n$ равно степени отображения λ:*

$$h_n = \frac{\deg(\lambda)}{n}. \tag{3}$$

Напомним, что *степенью* голоморфного отображения комплексных пространств одинаковой размерности называется количество прообразов точки общего положения из области значений. Под точками общего положения в данном случае понимаются точки из дополнения к множеству критических значений (образу множества точек, в которых отображение не является локально взаимно однозначным). В отличие от вещественных отображений, число прообразов не зависит от выбора этой точки. Дело в том, что множество критических значений (как в комплексном, так и вещественном случае) образует гиперповерхность в области значений отображения. В вещественном случае эта гиперповерхность делит область значений на области, и для различных областей число прообразов может быть разным. В комплексном же случае комплексная гиперповерхность имеет вещественную коразмерность два (как точка на плоскости или кривая в трехмерном пространстве). Поэтому множество некритических значений голоморфного отображения связно и у произвольных двух некритических значений число прообразов совпадает.

Из этих же соображений вытекает, кстати, что в семействе голоморфных отображений зависящих от дополнительных параметров степень одинакова для общих значений параметров (для исключительных значений, образующих гиперповерхность в пространстве параметров, часть прообразов может «убегать на бесконечность»).

Примером семейства отображений является множество квазиоднородных отображений.

Определение 10 Пусть задан набор переменных $x_1, \ldots, x_n$ и каждой переменной x_i сопоставлено положительное число α_i, называемое ее *весом.* Для определенности, мы будем предполагать все веса целыми, хотя иногда удобно рассматривать и рациональные числа. (Квазиоднородной) *степенью* монома $x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$ называется сумма весов всех входящих в него переменных,

$$\deg(x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}) = k_1\,a_1 + \cdots + k_n\,a_n.$$

Квазиоднородным многочленом степени N называется произвольная линейная комбинация мономов данной степени N. Наконец, отображение $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ координатных пространств называется *квазиоднородным*, если его компоненты — квазиоднородные многочлены, возможно, различных степеней.

Более формальное определение квазиоднородного отображения состоит в следующем. Рассмотрим группу $\mathbb{C}^*$ ненулевых комплексных чисел по умножению и ее действие в координатных пространствах по правилу

$$u \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (u^{\alpha_1} x_1, \ldots, u^{\alpha_n} x_n), \qquad u \cdot (y_1, \ldots, y_n) = (u^{\beta_1} y_1, \ldots, u^{\beta_n} y_n).$$

Тогда полиномиальное отображение $y = f(x)$ является квазиоднородным, если оно $\mathbb{C}^*$-эквивариантно, $f(u \cdot x) = u \cdot f(x)$.

Квазиоднородное отображение называется *собственным*, если прообразом начала координат является только начало координат, $f^{-1}(0) = 0$.

Теорема 11 *Степень произвольного собственного квазиоднородного отображения определяется весами квазиоднородности и равна отношению произведений весов переменных образа и прообраза:*

$$\deg f = \frac{\prod_{i=1}^n \beta_i}{\prod_{i=1}^n \alpha_i}.$$

Доказательство. Условие собственности означает отсутствие убегания на бесконечность пробразов некритических значений и мы его сейчас не будем комментировать подробно.

Из соображений, приведенных выше, следует, что все собственные квазиоднородные отображения с одинаковыми наборами весов переменных имеют одинаковую степень, и потому степень однозначно определяется весами и для нахождения степени достаточно ее вычислить для одного произвольного примера. В случае, когда все веса α_i переменных прообраза равны единице, в качестве такого тестового отображения можно рассмотреть отображение

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1^{\beta_1}, \ldots, x_n^{\beta_n}).$$

Степень такого отображения равна, очевидно, $\prod_{i=1}^n \beta_i$, что доказывает формулу в данном частном случае.

Далее, композиция $\mathbb{C}^n \xrightarrow{g} \mathbb{C}^n \xrightarrow{f} \mathbb{C}^n$ двух собственных квазиоднородных отображений f и g также собственна и квазиоднородна. Очевидно, степень композиции равна произведению степеней отображений f и g. Поэтому если формула теоремы справедлива для двух из трех отображений f, g и $f \circ g$, то она справедлива и для третьего. Выбрав в качестве весов первого экземпляра $\mathbb{C}^n$ все единицы а в качестве отображения g тестовое отображение, приведенное выше, мы установим формулу и для отображения f с произвольным набором весов. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь отображение Ляшко-Лойенги λ. Умножение всех критических значений многочлена на общую константу равносильно умножению самого многочлена на эту константу (с последующей перенормировкой координаты на накрывающей поверхности с тем, чтобы старший коэффициент обратился бы в единицу). Это задает действие группы $\mathbb{C}^*$ на областях определения и значения отображения λ, относительно которых отображение эквивариантно. Следовательно, отображение λ квазиоднородно и для нахождения его степени применима приведенная выше теорема.

Задача 12 Докажите собственность отображения λ.

Задача 13 Определите веса квазиоднородности координат в прообразе и образе отображения λ. (Ответ: $(2,3,\dots,n)$ в прообразе и $(n, 2\,n, \dots, (n-1)\,n)$ в образе.)

Из результатов предыдущих задач вытекает вычисление степени отображения λ:

$$\deg(\lambda) = \frac{n \cdot 2n \cdot \dots \cdot (n-1)n}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} = n^{n-2}.$$

Вместе с равенством (3) это дает независимое доказательство теоремы 3.

6. Задача Гурвица

Более общая задача Гурвица состоит в перечислении разветвленных накрытий сферы $C \to S^2$ с произвольным фиксированным типом ветвления в выбранном заранее конечном множестве точек ветвления. Под типом ветвления над некоторой точкой $y \in S^2$ понимается произвольный неупорядоченный набор $\beta = (b_1, \dots, b_k)$ натуральных чисел, таких, что $n = b_1 + \dots + b_k$. Такой набор называется *разбиением* числа n. Для определенности, элементы, входящие в разбиение, мы будем перечислять в убывающем порядке: $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_k > 0$. Скажем, что в некоторой точке сферы ветвление имеет данный тип β, если прообразом маленького диска с центром в этой точке является несвязное объединение k дисков, причем на i-м диске накрытие топологически эквивалентно отображению $z \mapsto z^{b_i}$ окрестности начала координат на комплексной плоскости.

Более подробно, зафиксируем следующие данные:

n — степень накрытия;

$z_1, \dots, z_c$ — набор точек ветвления на сфере, c — их количество;

$(\beta_1, \dots, b_c)$ — набор разбиений числа n.

Мы рассматриваем разветвленные накрытия $C \to S^2$ связными поверхностями, имеющие ветвление типа β_i в точке z_i и неразветвленные в остальных точках. Автоматически получается, что C — гладкая компактная ориентированная поверхность, то есть сфера с ручками. Ее *род* g, то есть количество ручек, определяется данными ветвления. Назовем *кратностью* разбиения $\beta = (b_1, \dots, b_k)$ сумму уменьшенных на один размеров частей

$$\mu(\beta) = \sum_{i=1}^{k} (b_i - 1) = n - k.$$

Тогда род поверхности C определяется **формулой Римана-Гурвица**

$$\sum_{j=1}^{c} \mu(\beta_j) = 2g - 2 + 2n.$$

Как мы видели при изучении поведения многочленов, точку с ветвлением порядка k можно пошевелить таким образом, чтобы она распалась на $\mu = k - 1$

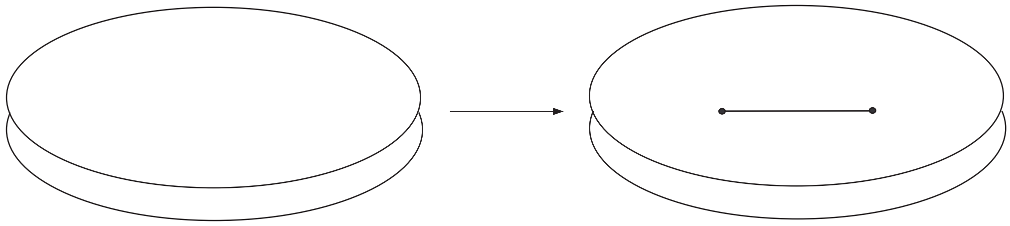


Рис. 4. Вклеивание ручки, соединяющей два слоя накрытия

простых (с ветвлениями порядка два) критических точек. Таким образом, в левой части формулы стоит общее количество критических точек, при условии, что все они простые.

Формулу Римана-Гурвица несложно доказать, однако доказательство зависит от того, на какие знания оно опирается. Например, можно рассуждать следующим образом. При $g = 0$ формула следует из поведения многочленов (у многочленов из $2n - 2$ простых критических точек $n - 1$ приходится на конечную область и $n - 1$ слипаются в точке ∞). Приклеивание же ручки к поверхности накрытия легко реализовать, добавив к имеющимся точкам ветвления две новые (см. рис. 4). Формула Римана-Гурвица следует из этих соображений индукцией по g.

Накрытия рассматриваются с точностью до следующей эквивалентности: два накрытия $C \to S^2$ и $C' \to S^2$ считаются эквивалентными, если существует гомеоморфизм $C \simeq C'$ накрывающих поверхностей, при котором эти накрытия отождествляются. Эту эквивалентность удобно изображать при помощи коммутативной диаграммы отображений

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr] & & C' \arrow[dl] \\ & S^2 & \end{tikzcd}$$

Если в приведенной диаграмме $C = C'$, то такая диаграмма называется *автоморфизмом накрытия.* Автоморфизмы накрытия образуют конечную группу (которая естественно вкладывается в группу перестановок точек произвольного неособого слоя).

Определение 14 *Числом Гурвица* $h_{\beta_1,\dots,\beta_c}$ называется количество неэквивалентных накрытий степени n с заданными типами ветвления над заданными точками, посчитанное с учетом весов, обратных порядкам групп автоморфизмов накрытия.

Очевидно, что число Гурвица не зависит от положения критических значений накрытия, поэтому они не входят в обозначение. Как и при перечислении деревьев, число автоморфизмов накрытия можно уменьшить, делая на накрываемой поверхности различные пометки: можно отмечать некоторые из критических точек, нумеровать их, и т.п. Модифицированные таким образом числа накрытий отличаются от определенного выше простыми комбинаторными множителями. Мы будем пользоваться следующей модификацией чисел Гурвица. Во-первых, мы исключим из обозначения разбиений единицы. Единицы отвечают некритическим точкам особого слоя накрытия и их количество определяется степенью накрытия. Во-вторых, мы будем теперь обозначать через c количество только тех критических значений, которые *не являются простыми* и только их типы ветвления будут включаться в обозначение числа Гурвица. Количество же m точек простого ветвления (отвечающего разбиению (2)) определяется родом по формуле Римана-Гурвица

$$m = 2n - 2 + 2g - \mu, \tag{4}$$

где $\mu = \sum_{i=1}^{c} \mu(\beta_i)$ — суммарная кратность непростых критических значений. В-третьих, мы будем считать все критические точки, отвечающие непростым критическим значениям, занумерованными. В частности, автоморфизмы накрытия должны оставлять все такие критические точки на месте. Модифицированные таким образом числа Гурвица обозначаются через $h_{g,n;\beta_1,\dots,\beta_c}$.

Вычисление конкретных чисел Гурвица является чисто комбинаторной задачей и потому не представляет большого интереса. Гораздо интереснее получить замкнутые формулы для серий чисел Гурвица. Например, интересно проследить зависимость этих чисел от g и n. Исходной мотивировкой служит следующая **формула Гурвица** (включающая формулу теоремы 3 как частный случай). Пусть $g = 0$ и, кроме того, $c = 1$, то есть среди всех критических значений лишь одно имеет сложный тип ветвления, отвечающий разбиению $\beta = (b_1, \dots, b_k)$. Тогда соответствующее число Гурвица равно

$$h_{0,n;\beta} = \frac{m!\, n^{n-\mu-3}}{(n-B)!} \prod_{i=1}^{c} \frac{b_i^{b_i}}{b_i!},$$

где $B = b_1 + \dots + b_k$ — сумма порядков ветвлений тех прообразов точки непростого ветвления, которые действительно являются критическими (соответственно, $n - B$ — это количество тех прообразов, в которых накрытие неразветвлено).

7. Зависимость чисел Гурвица от n

Для изучения зависимости чисел Гурвица от степени n накрытия их удобно группировать в производящий ряд

$$H_{g;\beta_1,\dots,\beta_c}(q) = \sum_{n \geq 1} \frac{h_{g,n;\beta_1,\dots,\beta_c}}{m!} q^n, \qquad m = 2n - 2 + 2g - \sum_{i=1}^{c} \mu(\beta_i).$$

Д.Звонкину принадлежит следующее удивительное открытие: оказывается, этот ряд сильно упрощается при замене переменной $q = Y\, e^{-Y}$. А именно, назовем *алгеброй Звонкина* алгебру многочленов Лорана

$$\mathcal{A} = \mathbb{Q}[Y, (1-Y)^{-1}].$$

Эта алгебра получается из алгебры многочленов добавлением бесконечной геометрической прогрессии $(1-Y)^{-1} = 1 + Y + Y^2 + \dots$.

Теорема 15 (Звонкин) *Для произвольных $g, c, \beta_1, \dots, \beta_c$, за исключением единственного случая $g = 1$, $c = 0$, ряд $H_{g;\beta_1,\dots,\beta_c}$ лежит в алгебре $\mathcal{A}$.*

Поскольку всякий многочлен определяется конечным числом своих коэффициентов, из теоремы следует, что весь ряд для чисел Гурвица определяется несколькими его начальными членами.

Мы хотим дать более явную характеризация элементов алгебры Звонкина как функций от q. Напомним, что ряд, обратный замене $q = Y\,e^{-Y}$ дается формулой Лагранжа

$$Y = \sum_{n\geq 1} \frac{n^{n-1}}{n!} q^n.$$

Рассмотрим векторное поле $D = q\frac{\partial}{\partial q}$. Рассматриваемое как дифференциальный оператор, оно действует умножением n-го члена Тейлора функции от q на n. Преобразования векторных полей при замене координат изучается в курсе математического анализа.

Задача 16 Найдите выражение для оператора D в координате Y. Ответ:

$$D = \frac{Y}{1-Y}\frac{\partial}{\partial Y}.$$

Применяя итерации этого оператора, а также обратного к нему, действующего по правилу

$$D^{-1}P(Y) = \int_0^Y \frac{1-y}{y}\,P(y)\,dy,$$

мы убеждаемся, что ряд

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n^{n-k}}{n!} q^n = D^{1-k} Y$$

лежит в алгебре $\mathcal{A}$ для произвольного k. Например,

$$D^{-1}Y = -\frac{1}{2}Y(Y-2), \qquad DY = \frac{Y}{1-Y},$$
$$D^{-2}Y = \frac{1}{12}Y(2Y^2-9Y+12), \qquad D^2Y = \frac{Y}{(1-Y)^3},$$
$$D^{-3}Y = -\frac{1}{72}Y(3Y^3-22Y^2+63Y-72), \qquad D^3Y = \frac{Y\,(2Y+1)}{(1-Y)^5}.$$

Обозначим через $\mathcal{A}_+$ линейную оболочку множества рядов D^kY для всех целых k. Глядя на приведенные примеры, нетрудно сделать вывод, что $\mathcal{A}_+$ содержит все многочлены от Y, делящиеся на Y, а также «половину» многочленов от $(1-Y)^{-1}$, также делящихся на Y (все они имеют полюса только нечетных порядков). Одним из следствий проведенных вычислений является существование интересных тождеств, называемых **тождествами Абеля**. Эти тождества выражают тот факт, что произведение двух многочленов от Y снова является многочленом от Y. Вот первые несколько из этих тождеств

$$\sum_{\substack{p+q=n\\ p,q\geq 1}} \frac{p^{p-1}}{p!}\frac{q^{q-1}}{q!} = 2(n-1)\frac{n^{n-2}}{n!} \qquad \sum_{\substack{p+q=n\\ p,q\geq 1}} \frac{p^{p-1}}{p!}\frac{q^{q-2}}{q!} = \frac{1}{2}(n-1)(n+6)\frac{n^{n-3}}{n!}$$

$$\sum_{\substack{p+q=n\\ p,q\geq 1}} \frac{p^{p-2}}{p!}\frac{q^{q-2}}{q!} = (n-1)(n+6)\frac{n^{n-4}}{n!} \qquad \sum_{\substack{p+q=n\\ p,q\geq 1}} \frac{p^{p-1}}{p!}\frac{q^{q-3}}{q!} = \frac{1}{12}(n-1)(5n^2+14n+48)\frac{n^{n-4}}{n!}$$

Простейшим примером лорановского многочлена, не лежащего в $\mathcal{A}_+$, является ряд

$$\frac{Y^2}{(1-Y)^2} = (DY)^2 = \sum_{n\geq 1} \frac{A_n}{n!}q^n, \quad \text{где} \quad A_n = n! \sum_{\substack{p+q=n\\ p,q\geq 1}} \frac{p^p}{p!}\frac{q^q}{q!}.$$

Хотя для чисел A_n нет более простого замкнутого выражения, их несложно вычислять для сколь угодно больших n. Вот первые несколько значений этих чисел: $0, 2, 24, 312, 4720, \ldots$. Применяя к ряду $(DY)^2$ итерации оператора D, можно получить лорановские многочлены с полюсом произвольного четного порядка. Мы получаем в результате, что всякий элемент из $\mathcal{A}$ представим в виде линейной комбинации единицы и следующих рядов:

$$D^{1-k}Y = \sum_{n\geq 1} \frac{n^{n-k}}{n!}q^n, \quad k \in \mathbb{Z}, \qquad D^k\left(\frac{Y}{1-Y}\right)^2 = \sum_{n\geq 1} \frac{n^k A_n}{n!}q^n, \quad k \in \mathbb{N}.$$

(Говорят, что эти ряды образуют аддитивный базис в $\mathcal{A}$.) Это замечание приводит к следующей эквивалентной формулировке теоремы Звонкина.

Следствие 17 *Для произвольных данных ветвления $g, c, \beta_1, \ldots, \beta_c$, за исключением единственного случая $g = 1$ и $c = 0$, n-й коэффициент производящего ряда $H_{g;\beta_1,\ldots,\beta_c}$ представим в виде*

$$\frac{h_{g,n;\beta_1,\ldots,\beta_c}}{m!} = P(n)\frac{n^n}{n!} + Q(n)\frac{A_n}{n!},$$

где Q — многочлен, и P — лорановский многочлен.

Пример 18 Для случая $g = 0$, $c = 1$, утверждение теоремы Звонкина вытекает из формулы Гурвица. Заметим, что в этом случае производящий ряд всегда лежит в $\mathcal{A}_+$. Многочисленные эксперименты показывают, что слагаемое, содержащее A_n, отсутствует при $g = 0$ для произвольных данных ветвлений. Гипотетически, при $g = 0$ производящий ряд всегда лежит в $\mathcal{A}_+$. Например,

$$H_{0;(3),(3)} = \frac{1}{12}Y^3(3Y+2)(9Y+2),$$
$$\frac{h_{0,n;(3),(3)}}{(2n-6)!} = \frac{3}{4}(27n^2-137n+180)\frac{n^{n-6}}{(n-3)!},$$
$$H_{0;(2,2),(3)} = \frac{3Y^4(Y+1)(2Y+1)}{(1-Y)},$$
$$\frac{h_{0,n;(2,2),(3)}}{(2n-6)!} = 6(3n^2-15n+20)\frac{n^{n-6}}{(n-4)!},$$
$$H_{0;(2,2),(2,2)} = -\frac{2\,Y^4(Y+1)(8Y^3+Y^2-12Y-1)}{(1-Y)^3},$$
$$\frac{h_{0,n;(2,2),(2,2)}}{(2n-6)!} = 8(2n^3-16n^2+43n-40)\frac{n^{n-6}}{(n-4)!}.$$

Пример 19 В исключительном случае накрытий рода 1 без вырожденных ветвлений производящая функция имеет вид

$$H_{1;\varnothing}(q) = -\frac{1}{24}(Y+\log(1-Y)) = \frac{1}{24}(Y^2/2+Y^3/3+\dots), \qquad \frac{h_{1,n;\varnothing}}{(2n)!} = \frac{A_n}{24\,n\,n!}.$$

Пример 20 Вот еще несколько примеров явных выражений для чисел Гурвица старших родов

$$H_{1;(3)} = -\frac{3Y^3(Y-2)}{16(1-Y)^2}$$
$$\frac{h_{1,n;(3)}}{(2n-2)!} = -\frac{3}{8}\frac{n^{n-3}}{(n-2)!} + \frac{3}{16}\frac{A_n}{n!}$$
$$H_{1;(2,2)} = \frac{2\,Y^4(Y-2)^2}{(1-Y)^4}$$
$$\frac{h_{1,n;(2,2)}}{(2n-2)!} = \frac{2}{3}\frac{n^{n-3}}{(n-2)!} + \frac{1}{6}(n-4)\frac{A_n}{n!}$$
$$H_{1;(4)} = -\frac{4Y^4(2Y-3)}{9(1-Y)^2}$$
$$\frac{h_{1,n;(4)}}{(2n-3)!} = -\frac{16}{9}(2n-3)\frac{n^{n-4}}{(n-2)!} + \frac{4}{9}\frac{A_n}{n!}$$
$$H_{1;(3),(3)} = \frac{Y^3(18Y^4-17Y^3-58Y^2+68Y+16)}{16(1-Y)^4}$$
$$\frac{h_{1,n;(3),(3)}}{(2n-4)!} = -\frac{1}{8}(27n^2-82n+54)\frac{n^{n-4}}{(n-2)!} + \frac{1}{32}(27n-56)\frac{A_n}{n!}$$
$$H_{2;\varnothing} = \frac{Y^2(6Y+1)}{1440(1-Y)^5}$$
$$\frac{h_{2,n;\varnothing}}{(2n+2)!} = \frac{7}{4320}\frac{n^n}{(n-2)!} - \frac{5}{1728}\frac{A_n}{(n-1)!}$$

Известное доказательство теоремы Звонкина использует топологические идеи. Нужно построить подходящий аналог пространства многочленов, определить отображение Ляшко-Лойенги для этого пространства и вычислить его степень. Реализация этого подхода требует привлечения современного аппарата алгебраической геометрии, топологии и теории когомолгий. Бо́льшая часть этой технической работы проведена в статье Екедала, Ландо, Шапиро и Вайнштейна. Удивительно, но несмотря на комбинаторную формулировку утверждения, доказать его без привлечения топологии удается только для маленьких родов $g = 0, 1$. Я приглашаю слушателей к поиску элементарного доказательства теоремы Звонкина.

8. Зависимость чисел Гурвица от g

В этом пункте мы хотим для сравнения продемонстрировать возможности комбинаторных и алгебраических методов для исследования чисел Гурвица. Эти методы основаны на применении теории представлений для группы $G = S_n$ перестановок из n элементов. Я надеюсь сделать изложение понятным даже для слушателей, незнакомых с теорией представлений, тем самым, заинтересовав их в подробном изучении этой теории. Для применения комбинаторных методов более естественно зафиксировать степень n накрытия и исследовать зависимость чисел Гурвица от рода g накрываемой поверхности, или, что то же самое, от числа m точек простого ветвления. Рассмотрим следующий производящий ряд

$$H_{\beta_1,\dots,\beta_c}(u) = \sum_{g\geq 0} h_{g,n;\beta_1,\dots,\beta_c}\frac{u^m}{m!},$$

где n фиксировано, а величины m и g связаны соотношением (4).

Теорема 21 *Для произвольных данных ветвления ряд $H_{\beta_1,\dots,\beta_c}$ как функция от u является лорановским многочленом от e^u, то есть конечной линейной комбинацией функций вида e^{ku} с целыми k.*

Пример 22 Приведем явные выражения для производящих рядов теоремы для небольших значений n (всюду в этих примерах $c = 1$).

$$\begin{aligned}
H_{(1)} &= 1Б \\
H_{(2)} &= \frac{1}{4}\,(e^u - e^{-u}), \\
H_{(1,1)} &= \frac{1}{4}\,(e^u - 2 + e^{-u}), \\
H_{(3)} &= \frac{1}{18}\,(e^{3u} - 2 + e^{-3u}), \\
H_{(2,1)} &= \frac{1}{12}\,(e^{3u} - 3\,e^u + 3\,e^{-u} - e^{-3u}), \\
H_{(1,1,1)} &= \frac{1}{36}\,(e^{3u} - 9\,e^u + 16 - 9\,e^{-u} + e^{-3u}).
\end{aligned}$$

Для простоты мы будем предполагать, что $c = 1$, то есть имеется одна выделенная точка на сфере, над которой ветвление имеет произвольный тип $\beta = (b_1, \dots, b_k)$, где $b_1 + \dots + b_k = n$, а все остальные m критических точек простые и отвечающие им критические значения различны. Рассуждения, аналогичные проведенным ниже, применимы и в случае произвольных данных ветвления.

Приведем переформулировку определения числа Гурвица в терминах группы перестановок. Монодромия, соответствующая обходу вокруг точки ветвления типа $(b_1, \dots, b_k)$, разбивает множество точек неособого слоя на k подмножеств порядков $b_1, \dots, b_k$, причем внутри каждого подмножества элементы переставляются циклически. Мы скажем, что данная перестановка имеет *циклический тип* $(b_1, \dots, b_k)$. Перестановки фиксированного циклического типа образуют один класс сопряженности в группе $G = S_n$. Рассуждения, аналогичные использованным в случае топологических многочленов, приводят к следующей формулировке.

Число $n!\, h_{g,n;\beta}$ равно количеству последовательностей $(s_1, \dots, s_m)$ транспозиций в группе S_n, таких, что 1) произведение $s_1 \cdots s_m$ — имеет данный циклический тип β, и 2) группа, порожденная транспозициями s_i, действует на множестве переставляемых элементов транзитивно.

Второе условие равносильно условию связности накрывающей поверхности. В случае многочленов оно выполняется автоматически. Определим вариант чисел накрытий $\tilde{h}_{g,n;\beta}$ и отвечающих им производящих функций $\widetilde{H}_\beta$, в котором условие связности накрывающей поверхности отброшено. Всякое накрытие несвязной поверхностью является комбинацией нескольких накрытий связными поверхностями. Поэтому числа $\tilde{h}_{g,n;\beta}$ и $h_{g,n;\beta}$ выражаются друг через друга:

$$\begin{aligned}
\widetilde{H}_{(n)} &= H_{(n)}, \\
\widetilde{H}_{(p,q)} &= H_{(p,q)} + H_p\, H_q, \\
\widetilde{H}_{(p,q,r)} &= H_{(p,q,r)} + H_{(p,q)}H_{(r)} + H_{(p,r)}H_{(q)} + H_{(r,q)}H_{(p)} + H_{(p)}H_{(q)}H_{(r)}, \\
&\text{и т.д.}
\end{aligned}$$

Следовательно, утверждение теоремы 21 для рядов H_β равносильно аналогичному утверждению для рядов $\widetilde{H}_\beta$.

Итак, нам нужно вычислить количество представлений перестановок данного циклического типа в виде произведения m транспозиций. Рассмотрим групповую алгебру $\mathbb{Z}[G]$ группы $G = S_n$. Ее элементы образованы всевозможными формальными линейными комбинациями (с целыми коэффициентами) элементов группы. Сумма определяетя покомпонентно, а произведение задается произведением в самой группе. Пусть C_2 — сумма всех транспозиций, а C_β — сумма всех перестановок циклического типа β. Тогда *число $n!\, \tilde{h}_{g,n;\beta}$ равно коэффициенту при единичном элементе в произведении $C_2^m C_\beta \in \mathbb{Z}[G]$.*

Действительно, при раскрытии скобок в произведении $C_2^m C_\beta$ различным слагаемым отвечают различные последовательности вида $(s_1, \dots, s_m, s_{m+1})$, где перестановка s_i является транспозицией при $1 \le i \le m$, и имеет циклический тип β при $i = m+1$. При этом вклад в коэффициент при единичном элементе дают именно те последовательности, произведение элементов которых является тождественной перестановкой.

Для нахождения искомого коэффициента удобно воспользоваться следующим приемом. Рассмотрим элементы групповой алгебры как линейные операторы, действующие в векторном пространстве $\mathbb{C}[G] \simeq \mathbb{C}^{n!}$ (это так называемое регулярное представление). Заметим, что матрица оператора, отвечающая произвольному неединичному элементу группы G, имеет только нули на главной диагонали. Следовательно, ее след равен нулю. След же единичной матрицы равен размерности регулярного представления, то есть $n!$. Отсюда мы получаем равенство

$$\tilde{h}_{g,n;\beta} = \frac{1}{(n!)^2}\ \mathrm{tr}_{\mathbb{C}(G)}(C_2^m C_\beta).$$

Далее, как и всякое конечномерное представление, регулярное представление раскладывается на неприводимые. Один из центральных результатов теории представлении конечных групп состоит в том, что каждое неприводимое представление λ встречается в регулярном, причем кратность его вхождения равна его размерности $\dim\lambda$. Следовательно,

$$\tilde{h}_{g,n;\beta} = \sum_{\lambda} \frac{\dim\lambda}{(n!)^2}\ \mathrm{tr}_{\lambda}(C_2^m C_\beta),$$

где суммирование производится по всем неприводимым представленриям группы G. Следующее замечание состоит в том, что элементы C_2, C_β действуют в каждом неприводимом представлении λ умножением на скаляр, который мы обозначим через $f_2(\lambda)$ и $f_\beta(\lambda)$, соответственно. Действительно, эти элементы принадлежат *центру* алгебры $\mathbb{Z}[G]$, то есть они коммутируют с произвольным элементом группы. Поэтому всякое собственное подпространство оператора C_2 или C_β инвариантно относительно действия всей группы. Но для неприводимого представления ненулевое инвариантное подпространство только одно — само пространство представления. Следовательно, оно является собственным для операторов C_2 и C_β. Мы пришли к следующему выражению для числа накрытий:

$$\tilde{h}_{g,n;\beta} = \sum_{\lambda} \left(\frac{\dim\lambda}{n!}\right)^2 f_2(\lambda)^m f_\beta(\lambda).$$

Домножая на $u^m/m!$ и суммируя по m, мы получаем равенство

$$\widetilde{H}_\beta = \sum_{\lambda} \left(\frac{\dim\lambda}{n!}\right)^2 f_\beta(\lambda)\, e^{f_2(\lambda)u}.$$

Эта явная формула и доказывает теорему 21. О том, как ее применять на практике, можно узнать из курса теории представлений.