ЗАДАЧИ К КУРСУ О СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЯХ И БРОУНОВСКОМ ДВИЖЕНИИ.

Пусть $W(n)$ — множество всех слов длины n, составленных из символов 0, 1. Вероятность слова $w \in W(n)$ зададим формулой
$$\mathbb{P}(w) = 2^{-n}.$$
Для подмножества $A \subset W(n)$ определим
$$\mathbb{P}(A) = \sum_{w \in A} \mathbb{P}(w).$$
Разумеется, выполнено
$$\mathbb{P}(W(n)) = 1.$$
Для $w \in W(n)$ пусть $N_0(w)$ есть количество нулей в слове w, а $N_1(w)$ есть количество единиц в слове w. Наконец, положим
$$W_k(n) = \{w|\ N_1(w) = k\}.$$

1. Найдите $\mathbb{P}(W_k(n))$.
2. Пусть $\alpha > 0$ фиксировано, а k таково, что $|k/n - 1/2| > \alpha$. Докажите, что найдется $\theta < 1$, такое, что при всех достаточно больших n имеем
$$\mathbb{P}(W_k(n)) < \theta^n.$$
Указание. Вспомните неравенства
$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}.$$
Сделайте замену переменной $p = k/n$. Наконец, прологарифмируйте и исследуйте возникающую функцию.
3. Докажите Закон Больших Чисел Бернулли: для всякого $\varepsilon > 0$ выполнено
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\{w : \left|\frac{N_k(w)}{n} - \frac{1}{2}\right| > \varepsilon\}) = 0.$$
4. Теперь, взяв произвольное p в интервале $0 < p < 1$, определим
$$\mathbb{P}_p(w) = p^{N_1(w)}(1-p)^{N_0(w)}.$$
Докажите, что $\mathbb{P}_p(W(n)) = 1$ и установите Закон Больших Чисел Бернулли для $\mathbb{P}_p$.

НОВЫЕ ЗАДАЧИ ПРО СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДАНИЯ

Точка на целочисленной прямой за каждый шаг сдвигается на один либо вправо, либо влево.

1. **Принцип отражения**. Пусть $k > 0$, $l > 0$. Докажите, что число путей длины n, начинающихся в k и заканчивающихся в l, хотя бы однажды проходящих через нуль, равно числу всех путей длины n, начинающихся в $-k$ и заканчивающихся в l.

   Указание. Нарисуйте график движения точки.
2. Сколько путей длины n, начинающихся в нуле и имеющих максимум в k?

   Рассмотрим теперь все определённые выше пути длины $2n$, начинающиеся и оканчивающиеся в нуле.
3. Сколько среди них путей, ни разу не возвращающихся в нуль на промежуточных шагах?
4. Сколько путей, никогда не оказывающихся на отрицательной полуоси?
5. Сколько путей, впервые достигающих точку -1 в момент $2n - 1$?