МНОГОЧЛЕН ТАТТА.

1. Введение: хроматический многочлен.

Пусть G — конечный граф, вершины которого перенумерованы числами от 1 до N. Некоторые из вершин соединены ребрами; допускаются кратные ребра (т.е. одну и ту же пару вершин может соединять несколько ребер), а также петли — ребра, начинающиеся и кончающиеся в одной и той же вершине. Мы будем раскрашивать вершины в k различных цветов; раскраску назовем правильной, если две вершины, соединенные ребром, раскрашены по-разному. (В частности, если в графе имеется петля, то правильных раскрасок не существует.) Количество правильных раскрасок графа G в k цветов мы обозначим $C_G(k)$.

Задача 1. Найдите $C_G(k)$, если G это а) две вершины, соединенные ребром, б) три вершины, попарно соединенные ребрами, в) полный граф K_n — n вершин, попарно соединенных ребрами, г) n точек на окружности (дуги окружности — ребра).

Граф называется *связным*, если из любой вершины можно попасть в любую другую, двигаясь по ребрам. Путь в графе (идущий по ребрам) называется циклом, если он заканчивается в той же самой вершине, где начался, и ни по какому ребру не проходит дважды. Связный граф, в котором нет циклов, называется *деревом* (несвязный — *лесом*).

Задача 2. а) Перечислите всевозможные деревья с 2, 3 и 4 вершинами (напомним, что вершины дерева нумерованы !). б) Докажите, что любые две вершинами дерева можно соединить путем, который ни по одному ребру не проходит дважды, и что такой путь единствен. в) Докажите, что каждое дерево имеет хотя бы один *лист* — вершину, в которую входит только одно ребро (“ветка”). г) Докажите, что если с дерева сорвать лист вместе с входящей в него веткой, то получится опять дерево. д) Докажите, что если в дереве n вершин, то в нем $n-1$ ребер. е) Вычислите $C_G(k)$, где G — дерево с n вершинами.

Задача 3. Пусть G — связный граф с n вершинами. Докажите неравенство $e(G) \geq n-1$, где $e(G)$ — количество ребер графа.

Замечание 1. В задаче 2е ответ не зависит от структуры дерева, а только от количества его вершин.

Замечание 2. Во всех приведенных примерах функция $C_G(k)$ оказалась многочленом. Ниже мы покажем, что это всегда так.

Задача 4. Пусть граф G состоит из двух кусков — G_1 и G_2, между которыми ребер нет (мы записываем это как $G = G_1 \sqcup G_2$). Докажите, что $C_G(k) = C_{G_1}(k)C_{G_2}(k)$.

Пусть теперь e — ребро графа G, соединяющее вершины с номерами i и j. Обозначим $G \setminus e$ граф, полученный разрывом ребра e: вершины те же, что и у графа G, ребро e отсутствует, а остальные ребра — как в G. Символом G/e обозначим граф, полученный стягиванием ребра e. Вершины G/e это все вершины G, кроме j; ребро e отсутствует; ребра, соединявшие j с другими вершинами, теперь идут в i, а остальные ребра не меняются. Заметим, что даже если в графе G отсутствовали петли или кратные ребра, они могут появиться в G/e.

Задача 5. а) Докажите равенство $C_{G\setminus e}(k) = C_{G/e}(k) + C_G(k)$. б) Докажите, что функция $C_G(k)$ для каждого графа G является многочленом. Чему равна его степень ? старший коэффициент ? свободный член ?

Задача 6*. а) Пусть граф G — прямоугольная решетка $m \times n$. Найдите $C_G(k)$. б) Та же задача для "торической решетки $m \times n$", в которой вершины (m, y) соединены ребрами с вершинами $(1, y)$, а вершины (x, n) — с вершинами $(x, 1)$, для всех x, y.

2. Еще введение: разрыв случайных ребер.

Рассмотрим еще раз граф G (который может иметь петли и кратные ребра). Граф подвергается случайному преобразованию: каждое из ребер, независимо от других, с некоторой вероятностью p разрывается, а с вероятностью $1 - p$ остается неизменным. Обозначим $R_G(p)$ вероятность того, что получившийся граф не будет связным.

Задача 7. Найдите $R_G(p)$, если граф G это а) две вершины, соединенные a ребрами; б) треугольник с кратностями сторон a, b, c; в) дерево с произвольными кратностями ребер; г) полный граф из 4 вершин с однократными ребрами.

Задача 8. а) Пусть e — ребро графа G. Выведите соотношение, связывающее $R_G(p)$, $R_{G\setminus e}(p)$ и $R_{G/e}(p)$. б) Докажите, что для всякого графа G функция $R_G(p)$ — многочлен.

Задача 9. Найдите степень старшего и младшего членов многочлена $R_G(p)$.

Указание. См. задачу 3.

Задача 10*. Найдите многочлен $R_G(p)$, где G — графы, упомянутые в задаче 6.

3. Третье введение: ациклические ориентации.

Пусть G — граф. Мы будем давать ребрам графа различные ориентации; ориентация называется ациклической, если в полученном ориентированном графе отсутствуют ориентированные циклы, т.е. нельзя пройти по стрелкам и вернуться в ту же точку. Обозначим A_G количество ациклических ориентаций G; так, $A_G = 0$, если в графе имеются петли.

Задача 11. Вычислите A_G для а) произвольного дерева, б) цикла длины n, в) полного графа из 4 вершин.

Задача 12. а) Пусть G — граф, а e — его ребро, не являющееся ни петлей, ни перешейком (т.е. граф $G \setminus e$ состоит из такого же количества связных кусков, что и сам граф G). Докажите равенство $A_G = A_{G\setminus e} + A_{G/e}$. б) Как надо изменить предыдущее равенство в случае, если e — перешеек ? А в случае, если e — петля ?

Определение. Пусть G — неориентированный граф (петли и кратные ребра допускаются). *Многочленом Татта* графа G называется многочлен $T_G(x,y)$, обладающий такими свойствами:

1) Если граф G не имеет ребер, то $T_G(x,y)=1$.
2) Если ребро e — не петля и не перешеек, то $T_G(x,y) = T_{G\setminus e}(x,y) + T_{G/e}(x,y)$.
3) Если ребро e — перешеек, то $T_G(x,y) = xT_{G/e}(x,y)$.
4) Если ребро e — петля, то $T_G(x,y) = yT_{G\setminus e}(x,y)$.

Разумеется, существование и единственность многочлена Татта еще нужно доказать.

Задача 13. Вычислите многочлен Татта следующих графов: а) полного графа с 2 и 3 вершинами, б) произвольного дерева, в) цикла с n вершинами.

4. Перечисление подграфов.

Подграфом графа G мы будем называть любой граф H, имеющий те же вершины, что и G, и полученный удалением из G некоторого множества ребер. Сам G тоже является своим подграфом. Обозначим $k(H)$ количество связных кусков графа H (считая также и изолированные вершины, если такие имеются), а $e(H)$ — количество ребер. Определим многочлен $Z_G(q,v)$ такой формулой:

$$Z_G(q,v) = \sum_H q^{k(H)} v^{e(H)}, \qquad (1)$$

где сумма берется по всем подграфам H графа G.

Задача 14. Вычислите многочлен Z_G в случае, когда G — а) дерево, б) цикл длины n, в) цикл, к каждой вершине которого приклеено дерево.

Задача 15. Докажите, что $Z_{G_1 \sqcup G_2} = Z_{G_1} Z_{G_2}$.

Задача 16. а) Докажите равенство $Z_G(q,v) = Z_{G\setminus e}(q,v) + vZ_{G/e}(q,v)$, где e — произвольное ребро графа G. б) Пусть ребро e — перешеек. Как связаны между собой многочлены $Z_{G\setminus e}(q,v)$ и $Z_{G/e}(q,v)$?

Задача 17. Докажите, что $Z_G(1,v) = (1+v)^{e(G)}$ для всякого графа G.

Задача 18. Докажите, что $Z_G(q,v)$ делится на $q^{k(G)}$, и найдите явно предел $\lim_{q\to 0} Z_G(q,v)/q^{k(G)}$.

Задача 19. а) Пусть n — число вершин графа G. Докажите, что $F_G(w) = \lim_{q\to 0} Z_G(q,qw)/q^n$ — многочлен, задаваемый формулой $\sum_H w^{e(H)}$, где сумма берется по множеству всех подграфов H графа G, являющихся лесами (т.е. не содержащих циклов). б) Какова степень многочлена F_G ? в) Докажите, что старший коэффициент многочлена F_G равен количеству поддеревьев графа G.

Задача 20*. Найдите многочлен $F_G(w)$ в случае, когда G — полный граф с n вершинами.

Задача 21. Пусть n — число вершин графа G. Докажите, что $T_G(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(x-1)^{k(G)}(y-1)^n} Z_G((x-1)(y-1), y-1)$ — многочлен Татта графа G.

5. Специализации

Задача 22. Пусть G — связный граф. Докажите, что а) число $T_G(1,1)$ равно количеству поддеревьев графа G. б) число $T_G(2,1)$ равно количеству подлесов графа G. в) число $T_G(1,2)$ равно количеству связных подграфов графа G. г) число $T_G(2,0)$ равно количеству ациклических ориентаций графа G, умноженному на 2^m, где m — количество петель.

Задача 23. Докажите формулу для хроматического многочлена $C_G(s) = (-1)^{n+k(G)}s^{k(G)}T_G(1-s,0)$. Здесь n — количество вершин графа G.

Задача 24. Докажите формулу $R_G(p) = (1-p)^{e(G)-n+k(G)}p^{n-k(G)}T_G(1,1/(1-p))$ для многочлена $R_G(p)$, определенного в разделе 2.

Задача 25. Докажите, что $T_G(0,2)$ равно количеству таких ориентаций ребер графа G, что через каждое ребро проходит хотя бы один ориентированный цикл. Проверьте это утверждение в случае, когда G — а) дерево, б) цикл, в*) решетки, упомянутая в задаче 6.

Задача 26*. Докажите, что $T_G(-1,-1)$ является, с точностью до знака, степенью двойки.

6. Теорема Кирхгофа.

Обобщим сначала формулу (1). А именно, припишем каждому ребру i графа G его собственный вес v_i (здесь индекс i меняется от 1 до $e(G)$ — общего количества ребер графа G), и рассмотрим многочлен от многих переменных

$$Z_G(q; v_1, \dots, v_{e(G)}) = \sum_H q^{k(H)} v_{i_1} \dots v_{i_s}, \tag{2}$$

где сумма, как и в (1), берется по всем подграфам H графа G, а произведение — по всем ребрам $i_1, \dots, i_s$ подграфа H. Построенный многочлен переходит в $Z_G(q,v)$, если $v_1 = \dots = v_{e(G)} = v$.

Задача 27. Докажите такой аналог утверждения задачи 19: многочлен $F_G(w_1,\dots,w_{e(G)}) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{q\to 0} Z_G(q; qw_1, \dots, qw_{e(G)})/q^n$, где n — количество вершин графа G, равен $\sum_H w_{i_1}\dots w_{i_s}$, где сумма берется по всем подлесам H графа G, а произведение — по всем ребрам $i_1,\dots,i_s$ данного леса H. Старший член (относительно суммарной степени по всем переменным $w_1,\dots,w_{e(G)}$) многочлена F_G равен такой же сумме, но по поддеревьям.

Этот старший член обозначается обычно $\mathcal{T}_G(w_1,\dots,w_{e(G)})$.

Задача 28. Докажите такой аналог утверждения задачи 16: $Z_G(q; v_1, \dots, v_{e(G)}) = Z_{G\setminus e}(q; v_1, \dots, v_{e(G)}) + v_e Z_{G/e}(q; v_1, \dots, v_{e(G)})$, где v_e — вес ребра e.

Сопоставим теперь всякому графу G матрицу $L_G(w_1,\dots,w_{e(G)})$ размера $n\times n$ по такому правилу: на диагонали матрицы стоят элементы $\ell_{ii} = -\sum_{\text{ребро } \alpha \text{ проходит через вершину } i} w_\alpha$, а вне диагонали — элементы $\ell_{ij} = \sum_{\text{ребро } \alpha \text{ соединяет вершины } i \text{ и } j} w_\alpha$. Матрица L_G, очевидно, симметрическая.

Задача 29. Докажите, что сумма всех строк и сумма всех столбцов матрицы L_G равна нулю; иными словами, имеет место равенство $L_G(w)\mathbf{1} = 0$, где $\mathbf{1}$ — вектор-столбец, состоящий из одних единиц.

Необходимые сведения об определителях.

1) Определитель матрицы (a) размера 1×1 равен a.
2) Для любой квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ и любого индекса k имеет место формула $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} \det A_{ik}$, где A_{ik} — матрица, получающаяся из A вычеркиванием k-й строки и i-го столбца.
3) При умножении всех элементов какой-нибудь строки или столбца матрицы на некоторую константу определитель матрицы умножается на ту же константу.
4) При обмене местами любых двух строк или столбцов определитель матрицы меняет знак. При транспонировании матрицы (ее отражении относительно главной диагонали, так что строки становятся столбцами и наоборот) определитель сохраняется. Если прибавить к любой строке матрицы любую линейную комбинацию (т.е. сумму с коэффициентами) других ее строк, то определитель сохраняется.
5) Система линейных уравнений $Ax = y$ с квадратной матрицей A однозначно разрешима относительно x при любой правой части y, если и только если $\det A \neq 0$.

Пусть $(L_G)_i(w)$ — матрица, полученная вычеркиванием i-й строки и i-го столбца из $L_G(w)$.

Задача 30. Используя результат задачи 29 и свойства 3 и 4 определителя, докажите, что а) $\det L_G(w) = 0$, б) $\det(L_G)_i(w)$ одинаков для всех i.

Задача 31. Докажите равенство $\det(L_G)_i(w) = \det(L_{G \setminus e})_i(w) + w_e \det(L_{G/e})_i(w)$, где e — одно из ребер графа G, а i произвольно.

Задача 32 (теорема Кирхгофа)**.** Докажите, что если G — связный граф, то $\det(L_G)_i(w) = \mathcal{T}_G(w)$, где многочлен $\mathcal{T}_G$ определен после задачи 27 (сумма по поддеревьям). В частности, при $w_1 = \dots = w_{e(G)} = 1$ указанный определитель равен числу поддеревьев графа G.

Задача 33. Найдите число поддеревьев а) дерева, б) цикла, в) полного графа с n вершинами. В пунктах 33а и 33б проверьте формулу задачи 32, а в пункте 33в воспользуйтесь ею.

7. Электрические цепи.

Произвольный граф G с n вершинами и $s = e(G)$ ребрами, которые снабжены весами $w_1, \dots, w_s$, можно рассматривать как электрическую цепь: вершины — контакты, ребра — проводники, а величина w_i — проводимость (обратное сопротивление) ребра i. Если $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — электрический потенциалы (напряжения) вершин $A_1, \dots, A_n$ графа, и ребро e соединяет вершины A_i и A_j, то имеет место закон Ома: $w_e(\varphi_i - \varphi_j) = J_e$, где J_e — электрический ток, протекающий по ребру e.

Подадим теперь в каждую из вершин $A_1, \dots, A_n$ (контактов) электрический ток $J_1, \dots, J_n$ и зададимся вопросом, какие потенциалы $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ получат при этом вершины.

Задача 34. Докажите, что вектор потенциалов $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ удовлетворяет системе линейных уравнений

$$L_G(w)\varphi = J, \tag{3}$$

где $J = (J_1, \dots, J_n)$ — вектор токов в вершинах.

Задача 35. Докажите, что а) если система уравнений (3) имеет решение, то $J_1+\dots+J_n=0$ (закон сохранения заряда); б) если $\varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ — решение системы (3), то вектор $(\varphi_1+a,\dots,\varphi_n+a)$ также является решением (то есть только разности потенциалов имеют физический смысл).

Предположим теперь, что $J_1+\dots+J_n=0$, и дополним систему (3) уравнением $\varphi_1=0$ (т.е. примем вершину A_1 в качестве начала отсчета потенциала).

Задача 36. Докажите, что система (3), дополненная уравнением $\varphi_1=0$, имеет единственное решение при любом векторе J, для которого $J_1+\dots+J_n=0$, тогда и только тогда, когда $\det(L_G)_1(w)\neq 0$.

Задача 37. а) Докажите, что если все проводимости w_e положительны, то любому току, удовлетворяющему условию сохранения заряда, соответствует единственная система потенциалов в вершинах, при условии что начало отсчета выбрано. Иными словами, система (3) имеет при всяком J таком, что $J_1+\dots+J_n=0$, единственное решение, удовлетворяющее условию $\varphi_1=0$. б) Приведите контрпример к подобному утверждению в случае, когда среди проводимостей есть отрицательные.

Переменный ток. На самом деле токи могут быть и комплексными числами. Физически комплексное число $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $r>0$, $\varphi\in[0,2\pi]$, изображает переменный ток, меняющийся со временем по закону $J(t)=r\cos(\omega t+\varphi)$, где $\omega>0$ — заранее выбранная величина (частота), которая в рамках одной задачи остается неизменной. Аналогичный смысл имеют и комплексные потенциалы φ. Помимо обычных сопротивлений (резисторов), для которых справедлив обычный закон Ома, в системах с переменным током участвуют элементы еще двух типов — конденсаторы и соленоиды. Конденсатор при подаче на него напряжения $U(t)=U_0\cos(\omega t+\varphi)$ пропускает через себя ток $J(t)=U_0\kappa\sin(\omega t+\varphi)$, а соленоид — ток $J(t)=-U_0\lambda\sin(\omega t+\varphi)$. Здесь $\kappa>0$ и $\lambda>0$ — величины, определяемые физическими параметрами конденсатора и соленоида (они называются емкостью и индуктивностью). Если изобразить переменный ток и переменное напряжение комплексными числами, то получится, что для конденсатора и соленоида тоже верен закон Ома $J=Uw$, только проводимость w будет комплексной — в случае конденсатора $w=\kappa i$, а для соленоида $w=-\lambda i$. Реальные физические системы представляют собой сочетание всех трех типов сопротивления (резисторов, конденсаторов и соленоидов), так что их проводимость является произвольным комплексным числом с положительной действительной частью.

Пусть G — граф с n вершинами и $s=e(G)$ ребрами. Ориентируем его ребра произвольным образом. Пусть B_G — прямоугольная матрица $n\times s$, элемент которой $b_{i\alpha}$ равен $+1$, если вершина i — начало ребра α, равен -1, если вершина i — конец ребра α, и равен 0, если ребро α через вершину i не проходит.

Задача 38. Докажите формулу $L_G(w)=B_G^TWB_G$, где W — матрица $s\times s$, на диагонали которой стоят веса w_α ребер графа.

Задача 39. Пусть $\varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_n)\neq 0$, но $\varphi_1=0$, а граф G связен. Докажите, что $B_G^T\varphi\neq 0$.

Задача 40. Пусть G и φ — как в задаче 39. Обозначим φ^* вектор-строку $(\bar\varphi_1,\dots,\bar\varphi_n)^T$. а) Докажите, что если $\operatorname{Re} w_e>0$ (т.е. если w_e — физически осмысленная проводимость) для всех ребер e графа G, то $\varphi^*L_G(w)\varphi\neq 0$. б) Докажите, что в физически осмысленной электрической сети для любого набора токов, удовлетворяющего условию сохранения заряда, существует и единственна система потенциалов, при условии, что начало отсчета выбрано. Иными словами, если $\operatorname{Re} w_e > 0$ для всех ребер e графа G и $J_1 + \cdots + J_n = 0$, то система (3) имеет единственное решение, для которого $\varphi_1 = 0$.

Задача 41. Докажите, что многочлен $\mathcal{T}_G(w)$ связного графа G обладает "свойством полуплоскости": если $\operatorname{Re} w_1 > 0, \ldots, \operatorname{Re} w_s > 0$, то $\mathcal{T}_G(w) \neq 0$.

8. Ферромагнетизм.

Простейшая модель кристалла — модель Поттса — представляет собой граф без петель и кратных ребер (обычно решетку, типа описанных в задаче 6), в вершинах которого находятся атомы, каждый из которых может иметь q различных состояний (значений спина). Считается, что взаимодействуют только атомы, стоящий в вершинах, соединенных ребром ("ближайшие соседи"), и только в том случае, если они находятся в одинаковых состояниях. В этом случае энергия взаимодействия равна J_e (e — ребро). Состоянием системы называется набор состояний атомов, т.е. функция σ из множества вершин графа в множество $\{1, 2, \ldots, q\}$. Каждому такому состоянию приписывается энергия, равная сумме энергий попарных взаимодействий, т.е. $E(\sigma) = \sum_e J_e \delta(\sigma(e_1), \sigma(e_2))$; здесь сумма берется по всем ребрам e графа, e_1 и e_2 — концы этого ребра (в любом порядке), а символ $\delta(a, b)$ равен 1, если $a = b$, и 0 в противном случае.

В статистической механике принят принцип Больцмана: вероятность того, что система находится в состоянии с энергией E, пропорциональна $\exp(-\beta E)$, где $\beta = 1/kT$, T — температура, а k — физическая константа (постоянная Больцмана). Таким образом, вероятность находиться в состоянии σ равна $\exp(-\beta E(\sigma))/Z(\beta)$, где $Z(\beta)$ — нормировочный множитель, равный

$$Z(\beta) = \sum_\sigma \exp(-\beta E(\sigma)) \tag{4}$$

(чтобы сумма вероятностей всех состояний равнялась 1) и называемый *статистической суммой* системы. Если $f(\sigma)$ — какая-нибудь функция состояния системы, то ее среднее значение равно

$$\langle f(\sigma) \rangle = \sum_\sigma f(\sigma) \exp(-\beta E(\sigma))/Z(\beta). \tag{5}$$

Задача 42. Докажите, что среднее значение $\langle E(\sigma) \rangle$ энергии системы равно $-Z'(\beta)/Z(\beta) = -\frac{d}{d\beta} \ln Z(\beta)$.

Статистическая сумма модели Поттса задается, таким образом, формулой

$$Z_G^{\text{Potts}}(\beta) = \sum_\sigma \prod_{e:\sigma(e_1)=\sigma(e_2)} \exp(-\beta J_e),$$

где сумма берется по всем конфигурациям системы, то есть по всевозможным отображениям σ из множества вершин графа G в $\{1, 2, \ldots, q\}$, а произведение — по всем ребрам e графа G (удовлетворяющих условию $\sigma(e_1) = \sigma(e_2)$). Обозначив $v_e(\beta) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-\beta J_e} - 1$, мы можем переписать это выражение в виде

$$Z_G^{\text{Potts}}(\beta) = \sum_\sigma \prod_e (1 + v_e(\beta)\delta(\sigma(e_1), \sigma(e_2))),$$

где произведение берется уже по всем ребрам графа G.

Задача 43. Докажите, что $Z_G^{\mathrm{Potts}}(\beta) = Z_G(q; v_1(\beta), \ldots, v_{e(G)}(\beta))$, где многочлен в правой части определен формулой (2).

Задача 44. Для графа-цепочки, состоящего из n вершин, последовательно соединенных ребрами с весом J, а) найдите $Z(\beta)$, б) найдите среднее значение энергии $E(\sigma)$, в) исследуйте поведение этих величин при $T \to 0$ и $T \to +\infty$.

Задача 45. Решите ту же задачу для графа — цикла из n вершин.

Задача 46*. Решите ту же задачу для решеток, описанных в задаче 6.

Рассмотрим теперь ситуацию $q = 2$, называемую моделью Изинга. В этом случае удобнее считать, что спин $\sigma(i)$ атома в вершине i принимает значения 1 и -1 (традиционно — $1/2$ и $-1/2$, но нам это не важно). При наличии внешнего магнитного поля h атом взаимодействует с ним, так что энергия состояния теперь задается формулой $E(\sigma) = \sum_e J_e \delta(\sigma(e_1), \sigma(e_2)) + h \sum_i \sigma(i)$, где вторая сумма берется по всем вершинам графа.

Задача 47*. Выведите в этом случае формулу, связывающую статистическую сумму $Z(\beta, h)$ с функцией Z, определенной равенством (2).

Задача 48*. Для графа G — цепочки из n вершин вычислите а) среднее значение $\langle E(\sigma) \rangle$ энергии системы, б) среднее значение $\langle \sigma(0) \rangle$ спина в данной вершине 0.

Замечание 3. Из соображений симметрии ясно, что $\langle \sigma(0) \rangle \to 0$ при $h \to 0$.

Задача 49*. Вычислите для графа G из задачи 44 *среднюю спонтанную намагниченность* в данной вершине 0, т.е. величину $M = \lim_{h \to +0} \lim_{n \to \infty} \langle \sigma(0) \rangle$.

Ответ в этой задаче не равен нулю, хотя переход к пределу в обратном порядке $\lim_{n \to \infty} \lim_{h \to +0} \langle \sigma(0) \rangle$ дает 0 в силу замечания 3. Это явление и называется ферромагнетизмом.

Литература

[1] A. Sokal, The multivariate Tutte polynomial (alias Potts model) for graphs and matroids, arxiv.org No. 0503607.

[2] D.J.A. Welsh and C. Merino, The Potts model and the Tutte polynomial, *Journal of Mathematical Physics*, V. 41, No. 3(2000).

[3] М. Джимбо, Т. Мива, *Алгебраический анализ точно решаемых решеточных моделей*, Регулярная и хаотическая динамика, Ижевск, 2000.