Задачи по геометрической теории групп

В. Клепцын

August 1, 2006

1 Аменабельность групп

1.1 Общие свойства

Определение 1. Конечно-порождённая группа G с системой образующих $\{a_1, \ldots, a_n\}$ называется *аменабельной*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \text{ конечное } A_\varepsilon \subset G : \quad \frac{\#\partial A_\varepsilon}{\#A_\varepsilon} < \varepsilon. \tag{1}$$

Здесь граница берётся в смысле метрики ρ_F, где $F = \{e, a_1, a_1^{-1}, a_2, a_2^{-1}, \ldots, a_n, a_n^{-1}\}$.

Задача 1. Докажите корректность определения 1, а именно, что свойство аменабельности не зависит от выбора системы образующих.

Задача 2. Докажите, что условие (1) равносильно следующему:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \text{ конечное } A'_\varepsilon \subset G : \quad \# (F \cdot A'_\varepsilon) < (1+\varepsilon) \cdot \#A'_\varepsilon.$$

Определение 2. Счётная группа G называется *аменабельной*, если для любых $\varepsilon > 0$ и конечного подмножества $\Phi \subset G$ найдётся конечное подмножество $A_{\varepsilon,\Phi} \subset G$, удовлетворяющее

$$\# (\Phi \cdot A_{\varepsilon,\Phi}) < (1+\varepsilon) \cdot \#A_{\varepsilon,\Phi}.$$

Задача 3. Докажите, что для конечно-порождённых групп определения 1 и 2 равносильны.

Замечание 1. *На самом деле, определение 2 это общее определение аменабельности — нужно только убрать из него первое слово "Счётная". Но для простоты мы будем работать только со счётными группами — именно к ним относятся все дальнейшие задачи.*

Задача 4. Группа $\mathbb{Z}^n$ аменабельна.

Задача 5. Подгруппа аменабельной группы аменабельна.

Задача 6. Декартово произведение аменабельных групп аменабельно.

Задача 7.* Фактор аменабельной группы аменабелен.

Задача 8.* Если у группы G есть нормальная подгруппа N, и обе группы N и G/N аменабельны, то группа G аменабельна.

Задача 9.* Для знакомых с понятием разрешимости: разрешимая группа аменабельна.

1.2 Зачем нужна аменабельность?

.

Для дальнейшего нам потребуется понятие меры на множестве X. Не знакомые с этим понятием могут думать, что по множеству X как-то распределена масса, и мера подмножества $A \subset X$ — это масса, сосредоточенная в этом подмножестве. (Распределение массы при этом может быть любым — точечная масса, сосредоточенная в одной точке, распределение с плотностью, смесь вышеперечисленного, что-нибудь ещё,...).

Тем самым, мера — это отображение из множества ("хороших") подмножеств X в $[0, +\infty)$, удовлетворяющее условию

$$\mu(\bigsqcup_j A_j) = \sum_j \mu(A_j)$$

(мера объединения непересекающихся подмножеств равна сумме мер). В дальнейшем все меры (если не оговорено противное) будут предполагаться *вероятностными* — то есть удовлетворяющими $\mu(X) = 1$.

Задача 10. Пусть задано непрерывное отображение $f : X \to Y$, и мера μ на X. Дайте определение меры на Y, являющейся образом меры μ при отображении f. Эта мера обозначается $f_*\mu$.
Указание. *Представьте себе, что в каждой точке $x \in X$ сидит лягушка, которая по команде "Делай раз!" прыгает в соответствующую точку $f(x) \in Y$. Какие лягушки при этом попадут в множество $B \subset Y$? Какова будет их общая масса?*

Задача 11. Пусть теперь $f : X \to X$. Дайте определение того, что мера μ на X *инвариантна* под действием f.

Задача 12. Пусть заданы непрерывное отображение $f : X \to X$ и мера ν на X. Насколько будет отличаться мера $\nu_n := \frac{1}{n}(\nu + f_*\nu + \cdots + f_*^{n-1}\nu)$ от своего образа $f_*\nu_n$?

Для мер существует понятие сходимости мер, которое достаточно интуитивно, но которое мы не будем формализовывать. (Внимание: это не сходимость мер на каждом множестве! Ибо разумно считать, что меры, сосредоточенные в точках $\frac{1}{n}$, стремятся к мере, сосредоточенной в точке 0, а при этом предельная мера множества $\{0\}$ равна 1 и не совпадает с пределом его допредельных мер, равным нулю!)

Для следующих задач нам понадобится утверждение, в которое предлагается поверить:

Теорема 1. *Из любой последовательности вероятностных мер на компакте X можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Задача 13. Докажите *теорему Крылова-Боголюбова*: для любого непрерывного отображения f компакта X в себя на X найдётся инвариантная относительно этого отображения мера.
Указание. *Воспользуйтесь предыдущей задачей.*

Задача 14. Ослабим теорему Крылова-Боголюбова, предположив, что f — гомеоморфизм. Поймите, где в решении предыдущей задачи сидит фёльнеровская последовательность для группы $\mathbb{Z}$, действующей на X наиболее естественным способом:

$$k(x) := f^k(x), \quad k \in \mathbb{Z}, x \in X.$$

Задача 15. Обобщите теорему Крылова-Боголюбова на случай действия аменабельных групп. А именно, докажите, что если аменабельная группа действует на метрическом компакте X, то найдётся мера μ на X, инвариантная одновременно под действием *каждого(!)* элемента группы.

Задача 16. Обобщите предыдущий результат до следующего утверждения. Пусть аменабельная группа G действует на *аффинном* компакте Y — то есть на компакте, из точек которого можно (разумно) брать выпуклые комбинации (см. курс Протасова). Пусть это действие аффинно — применение любого элемента группы переводит выпуклую комбинацию точек в такую же выпуклую комбинацию их образов. Тогда у этого действия найдётся неподвижная точка — точка $y_0 \in Y$, которую оставляют на месте *все* элементы группы:

$$\forall g \in G \quad g(y_0) = y_0.$$

1.3 Функция роста

Следующие несколько задач и определений посвящены *функции роста* — способу измерять, сколько элементов можно получить в группе произведением не более чем данного числа образующих и обратных к ним.

Определение 3. *Функция роста* конечно-порождённой группы G по отношению к образующим $\{a_1, \ldots, a_k\}$ — это функция

$$f_{G,F}(N) = \# U_N(e) = \# F^N.$$

Задача 17. Найдите функцию роста абелевой группы $\mathbb{Z}^k$ и свободной группы L_k (со стандартными системами образующих).

Замечание 2. *Свободную группу с k образующими мы будем в дальнейшем обозначать L_k (вместо более стандартного F_k), дабы избежать конфликта обозначений с часто использующимся множеством F.*

Задача 18. Рассмотрим *группу Гейзенберга*:

$$G_{Heis} = \{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\}.$$

Зададим её тремя образующими

$$A_p = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверьте, что

i)

$$[A_p, A_x] = A_1,\ [A_p, A_1] = [A_x, A_1] = e,$$

где под коммутатором $[A, B]$ понимается групповой коммутатор $ABA^{-1}B^{-1}$ (а не алгебраический $AB - BA$!!!).

ii) Каждый элемент единственным образом представляется в виде произведения $A_x^b A_p^a A_1^c$, где $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Указание. *Буквы для обозначения степеней выбраны не случайно.*

Задача 19. Оцените функцию роста группы Гейзенберга относительно набора образующих $\{A_p, A_x, A_c\}$ с точностью до умножения на константу.

Определение 4. Введём на возрастающих функциях из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$ отношение порядка: $f \preccurlyeq g$, если для некоторого C при всех n выполнено $f(n) \le g([Cn])$.

Определение 5. Монотонные функции f и g *эквивалентны в смысле роста*, если $f \preccurlyeq g$ и $g \preccurlyeq f$.

Определение 6. *Функцией роста* конечно-порождённой группы G называется класс эквивалентности (в смысле определения 5) её функции роста (в смысле определения 3) по отношению к какому-нибудь набору образующих.

Задача 20. Проверьте, что предыдущее определение корректно, то есть что функции роста по отношению к разным наборам образующих действительно эквивалентны в вышеописанном смысле.

Задача 21. Какие из следующих функций эквивалентны:

$$n, n^2, n^\alpha, e^{\sqrt{n}}, 2^n, e^n, 10^n?$$

Задача 22. Какой из функций n^d эквивалентна функция роста группы Гейзенберга?

Определение 7. Конечно-порождённая группа G имеет

- *полиномиальный рост*, если для некоторого $d > 0$ имеем $f_G(N) \preccurlyeq N^d$.
- *экспоненциальный рост*, если для некоторых $C, \varepsilon > 0$ имеем $f_{G,F}(N) \ge Ce^{\varepsilon N}$ при всех N. Это равносильно (докажите!) тому, что $f_G \succcurlyeq e^N$.
- *субэкспоненциальный рост*, если её рост не экспоненциален. Это эквивалентно (хотя мы этого доказывать не будем!) тому, что

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\ln f_{G,F}(N)}{N} = 0.$$

Задача 23. Всякая группа субэкспоненциального роста аменабельна.
Указание. *Есть (по меньшей мере) два способа сделать эту задачу. Один — напрямую. Можно сказать, что приращение числа точек в шаре сравнимо с числом точек на его границе, а из неаменабельности теперь выведется экспоненциальный рост. Другой — воспользоваться парадоксальным разложением.*

Обратное утверждение неверно:

Задача 24. *i)* Рассмотрим подгруппу G группы аффинных отображений прямой, порождённую отображениями $A : x \mapsto 2x$ и $B : x \mapsto x + 1$. Докажите, что эта группа аменабельна.

Указание. *Рассмотрите подгруппу $T < G$ параллельных переносов из G, и примените задачу 8.*

ii) Докажите, что рост G экспоненциален.

Указание. *Приведите любую последовательность A и B (даже без обратных отображений) к виду $B^m A^n$, воспользовавшись соотношением $ABA^{-1} = B^2$. Посмотрите, что может получиться.*

Определение 8. Группа имеет *промежуточный рост*, если её функция роста растёт быстрее любого полинома, но медленнее любой экспоненты — то есть если мы имеем дело с субэкспоненциальным, но неполиномиальным ростом.

Хотя это абсолютно неочевидно (и мы этого доказывать не будем!), но имеет место следующая замечательная

Теорема 2 (Григорчук). *Группы промежуточного роста существуют!*

Группы Григорчука (таких примеров много) строятся явно — но даже приводить здесь это построение мы не будем, не говоря уж о его обосновании.

2 Предварительные сведения к гиперболической геометрии

Определение 9. *Сферой Римана* называется комплексная плоскость, к которой добавлена бесконечно удалённая точка:

$$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{C}P^1.$$

Определение 10. *Дробно-линейным преобразованием* сферы Римана называется отображение $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, имеющее вид

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \text{где } a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0.$$

Задача 25. Уточните определение 10, указав, куда должны переходить бесконечно удалённая точка и (при $c \neq 0$) точка $z = -d/c$.

Что происходит при $ad - bc = 0$?

Задача 26. *i*) Проверьте, что все дробно-линейные преобразования обратимы, и найдите явно обратные отображения.

ii) Всякое дробно-линейное преобразование есть композиция отображений вида $z + a$, cz и $1/z$.

Определение 11. *Двойным отношением* четырёх точек x, y, z, w на сфере Римана (из которых не более двух совпадающих) называется число

$$[x, y, z, w] = \frac{x-y}{x-z} : \frac{w-y}{w-z}.$$

Задача 27. Проверьте, что

$$[x, y, z, w] = \frac{x-y}{y-w} : \frac{x-z}{z-w}.$$

Как меняется двойное отношение при перестановке этих четырёх точек?

Задача 28. Проверьте, что двойное отношение четырёх точек не меняется при дробно-линейных преобразованиях: если f — дробно-линейное, то

$$[x, y, z, w] = [f(x), f(y), f(z), f(w)].$$

Указание. *Воспользуйтесь задачей 26.ii).*

Задача 29. Двойное отношение четырёх точек $[z, a, b, c]$, рассматриваемое как функция лишь первого аргумента z, есть дробно-линейное преобразование, переводящее a в 0, b в ∞ и c в 1.

Задача 30. Выведите из двух предыдущих задач, что для любых двух троек (a, b, c) и (a', b', c') различных точек на сфере Римана существует единственное дробно-линейное преобразование f, переводящее a в a', b в b' и c в c'.
Указание. *Это преобразование задаётся уравнением*

$$[z, a, b, c] = [f(z), a', b', c'].$$

Определение 12. *(Обобщённой) окружностью* на сфере Римана называется множество точек, являющееся либо (обычной) окружностью на комплексной плоскости, либо прямой, к которой добавлена бесконечно удалённая точка.

Задача 31. Двойное отношение четырёх точек вещественно тогда и только тогда, когда эти точки лежат на одной (обобщённой) окружности.

Задача 32. Дробно-линейные преобразования переводят окружности в окружности.

Задача 33. Дробно-линейное преобразование переводит вещественную прямую в вещественную прямую тогда и только тогда, когда его коэффициенты вещественны. (*Осторожно: неточная формулировка!*)

В этом случае комплексно-сопряжённые точки переходят в комплексно-сопряжённые.

Определение 13. Образом при симметрии точки относительно обобщённой окружности называется образ при симметрии относительно прямой и инверсный образ относительно окружности, в зависимости от типа обобщённой окружности.

Задача 34. Дробно-линейные преобразования переводят точки, симметричные относительно окружности, в точки, симметричные относительно образа этой окружности.

Задача 35. Дробно-линейное преобразование, сохраняющее единичный диск $D_1 = \{z : |z| < 1\}$ и переводящее точку 0 в себя, имеет вид $z \to \lambda z$, где $|\lambda| = 1$.

Задача 36. Выпишите явно какое-нибудь дробно-линейное преобразование, переводящее единичный диск D_1 в верхнюю полуплоскость $\Pi_+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$.
Указание. *(Почти) достаточно перевести три точки на единичной окружности в три точки на вещественной прямой. Кстати, почему?*

Задача 37. Пусть дробно-линейное преобразование сохраняет единичный диск и переводит точку 0 в некую точку a. Куда оно должно переводить точку ∞?

Задача 38. Докажите, что для любой точки a единичного диска существует дробно-линейное преобразование, сохраняющее единичный диск и переводящее точку 0 в точку a.
Указание. *Воспользуйтесь одной из задач 36 (сведя задачу к очевидной) или 37 (и выписав преобразование явно).*

Задача 39. *i*) Докажите, что дробно-линейные преобразования, сохраняющие диск, позволяют перевести любую его точку в любую точку.

ii) Докажите также, что при этом можно дополнительно перевести любой луч (геометрии Лобачевского, то есть половинку соответствующей обобщённой окружности), исходящий из первой точки, в любой луч, исходящий из второй.

iii) Докажите то же самое для верхней полуплоскости.

3 Гиперболическая геометрия

Напомним, что у плоскости Лобачевского есть две простые стандартные модели: модели Пуанкаре в круге и в полуплоскости. *Множество точек* в этих случаях это соответственно D_1 и Π_+. Граничная окружность (или прямая), называемая *абсолютом*, в модель, формально говоря, не входит — это не точки плоскости Лобачевского. Однако бывает удобно туда её точки добавить в качестве "точек на бесконечности" (так же, как это иногда делается для обычной плоскости).

Прямые плоскости Лобачевского в этих моделях изображаются (обобщёнными) окружностями, перпендикулярными абсолюту (точнее, той их частью, которая лежит внутри соответственно диска или полуплоскости). Иными словами, для модели в верхней полуплоскости это полуокружности с центром на вещественной прямой и вертикальные лучи, а для модели в круге это диаметры и дуги окружностей, перпендикулярных абсолюту.

Углы в плоскости Лобачевского в этих моделях определяются наиболее простым образом: это евклидовы углы между касательными к окружностям в точке пересечения прямых.

Движения плоскости Лобачевского, сохраняющие ориентацию, это дробно-линейные отображения, сохраняющие соответственно диск или верхнюю полуплоскость. Все движения получаются из этих добавлением к ним $\bar{z}$ (для диска) или $1/\bar{z}$ (для верхней полуплоскости) соответственно, а также всего, что получается композицией добавленного и старых отображений. Отметим, что задача 39 утверждает, что группа движений плоскости достаточно богата, чтобы перевести любую пару "(точка, направление из неё)" в любую другую пару — как и положено всякой уважающей себя геометрии.

Расстояния на плоскости Лобачевского можно определять одним из двух способов. Вот первый из них:

Определение 14. *Расстояние на плоскости Лобачевского* между точками x и y определяется как

$$\rho_{hyp}(x, y) = |\ln[a, x, y, b]|,$$

где точки a и b это точки на абсолюте у прямой плоскости Лобачевского, проходящей через точки x и y.

Задача 40. Введённое выше расстояние на плоскости Лобачевского корректно (под логарифмом стоит вещественное положительное число) и инвариантно относительно определённых выше движений.

При таком введении сразу получается инвариантность расстояний — что объясняет, почему называемые нами "движениями" отображения это действительно движения. Однако при таком определении расстояния придётся проверять неравенство треугольника. Поэтому мы предпочтём другой способ ввести метрику, дающий лучшее интуитивное понимание устройства геометрии Лобачевского. Это определение через длины векторов — и именно ему и будут посвящены несколько следующих задач.

Определение 15. *Касательным расслоением* к модели в диске (в полуплоскости) называется множество пар "точка, вектор" — то есть $D_1 \times \mathbb{C}$ (соответственно, $\Pi_+ \times \mathbb{C}$). Движение f действует на касательном пространстве, переводя вектор v, приложенный в точке x, в вектор $df|_x v = f'(x)v$, приложенный в точке $f(x)$.

Определение 16. *i)* *Гиперболической длиной* вектора v, приложенного в точке $a \in D_1$, назовём удвоенную (из соображений нормировки — см. ниже) евклидову длину его образа под действием отображения, переводящего a в $0 \in D_1$:

$$\|v\|_{hyp} = 2\,|df|_a(v)|_{eucl} = 2|v|_{eucl} \cdot |f'(a)|. \tag{2}$$

Гиперболической длиной вектора v, приложенного в точке $a \in \Pi_+$, назовём евклидову длину его образа под действием отображения, переводящего a в $i \in \Pi_+$:

$$\|v\|_{hyp} = |df|_a(v)|_{eucl} = |v|_{eucl} \cdot |f'(a)|. \tag{3}$$

Коэффициент $2|f'(a)|$ (соотв., $|f'(a)|$) в этих случаях мы будем называть *конформным коэффициентом.* Мы его будем дальше обозначать $K_{hyp}(a)$.

Задача 41. *i)* Пусть $a \in D_1$. Тогда для любых двух движений, переводящих a в 0, модули их производных в точке a совпадают.

Указание. *Рассмотрите композиционное частное этих отображений, и воспользуйтесь задачей 35.*

ii) Первая часть определения 16 корректна.

iii) Гиперболические длины векторов сохраняются под действием движений плоскости Лобачевского.

iv) Найдите производную в 0 дробно-линейного отображения, переводящего D_1 в Π_+ и отображающего 0 в i.

v) Проверьте согласованность первой и второй частей определения 16 и корректность второй части.

Задача 42. *i)* Выпишите явно какое-нибудь дробно-линейное преобразование, сохраняющее Π_+ и переводящее точку $x + iy \in \Pi_+$ в точку i, и определите конформный коэффициент для модели в полуплоскости.

Указание. *Преобразование лучше взять попроще.*

ii) Найдите конформный коэффициент для модели в диске.

Если для какого-нибудь многообразия (разумным образом) заданы длины касательных векторов, то говорят, что на этом многообразии задана *риманова метрика.* Следующее определение даёт стандартный способ в случае римановой метрики задавать длины кривых:

Определение 17. Пусть задана кривая $\gamma : [0, T] \to D_1$ (или $\gamma : [0, T] \to \Pi_+$) в плоскости Лобачевского. Определим её *(гиперболическую) длину* как интеграл от гиперболической длины вектора скорости $\dot{\gamma}$:

$$l_{hyp}(\gamma) = \int_0^T \|\dot{\gamma}(t)\|_{hyp}\, dt.$$

Задача 43. Так определённая длина кривой не зависит от выбора параметризации.

Задача 44. Гиперболическая длина задаётся как

$$l_{hyp}(\gamma) = \int_\gamma K_{hyp}(a)\, dl_{eucl},$$

где интеграл берётся по стандартной евклидовой длине.

Задача 45. Определённая нами длина кривой инвариантна относительно движений плоскости Лобачевского.

Научившись определять длины кривых, мы (опять-таки следуя общему подходу) можем определить расстояния между точками, а заодно удостовериться, что прямые это действительно кратчайшие пути (в общей ситуации они называются *геодезические*).

Определение 18. Расстояние между точками a и b это инфимум длин кривых, их соединяющих.

Задача 46. *i)* Пусть $y \in \mathbb{R}, y > 1$. Докажите, что в Π_+ отрезок вертикальной прямой это кратчайший путь от точки i к точке yi, и найдите его (гиперболическую) длину.

ii) Отрезок (гиперболической) прямой от точки a до точки b это кратчайший путь между этими двумя точками.

Указание. *Воспользуйтесь инвариантностью и задачей 39.*

iii) То же верно и в диске.

iv) Расстояния, заданные явно определением 14 и через риманову метрику определением 18, совпадают.

Итак, мы получили следующее описание расстояний в геометрии Лобачевского: чем ближе к абсолюту, тем на бóльшую константу начинают умножаться длины векторов, и соответственно тем больше там становится отношение гиперболической и евклидовой длин. А именно, в диске $ds_{hyp} = 2\frac{1}{1-r^2}\, ds_{eucl}$, а в верхней полуплоскости $ds_{hyp} = \frac{1}{y}\, ds_{eucl}$ (здесь ds обозначает *элемент длины* — то есть отображение, измеряющее длины векторов).

Поработаем теперь немного с другими геометрическими понятиями.

Определение 19. *Окружностью в геометрии Лобачевского* называется множество точек, удалённых от данной на данное (гиперболическое) расстояние $R > 0$.

Определение 20. *Гиперболической площадью* области U называется интеграл

$$S_{hyp}(U) = \int_U K^2_{hyp}(a)\, dS_{eucl}.$$

Задача 47. *i*) Докажите, что окружность в моделях Пуанкаре (в D_1 и в Π_+) *изображается* настоящей (обобщённой) окружностью.

Указание. *Воспользуйтесь инвариантностью и попытайтесь найти точку, для которой это было бы очевидно.*

ii) Правда ли, что её евклидов центр всегда совпадает с гиперболическим?

Задача 48. Найдите длину и площадь окружности радиуса R. Как они себя ведут при $R \to \infty$?

Задача 49 (Изопериметрическое неравенство). Приняв на веру, что на плоскости Лобачевского окружность ограничивает наибольшую площадь при заданной длине, докажите, что для некоторой константы $C > 0$ кривая любой длины l ограничивает площадь, не превосходящую Cl.

Задача 50 (Тонкие треугольники). Докажите, что радиусы вписаных окружностей в плоскости Лобачевского не превосходят некоторой константы, и найдите супремум возможных радиусов.
Указание. *Увеличьте треугольник, унеся все три вершины на абсолют, и заметьте, что такой треугольник один — движения плоскости Лобачевского позволяют перевести любые три точки на абсолюте в любые три точки.*

Заключительная задача этой серии это ключевой этап в рассуждении, выводящем гиперболичность группы из $C'(1/6)$-свойства.

Задача 51.* Пусть диск разрезан на топологически эквивалентные диску кусочки, причём с каждым внутренним диском граничат по меньшей мере семь других. Тогда общее число дисков не превосходит некоторой константы, умноженной на число дисков на границе (а значит, и той же константы, умноженной на число граничных “сторон”).
Указание. *Воспользуйтесь формулой Эйлера: $В - Р + Г = 1$, и тем, что из каждой внутренней вершины исходят по меньшей мере три ребра, а каждое внутреннее ребро граничит с двумя дисками.*

Задача 52.**

i) Докажите, что если конечно-порождённая группа обладает свойством $C'(1/6)$, то её функция Дэна растёт не быстрее, чем линейно (и тем самым группа гиперболична в смысле определения через функцию Дэна).

ii) Пусть группа G порождается элементами $a_1, \ldots, a_k$, на которые наложено N случайно выбранных соотношений длины L, где $N = [(2k-1)^{L\theta}]$, а параметр $\theta \in [0, 1]$ фиксирован. Как ведёт себя при различных θ асимптотика при $L \to \infty$ того, что это представление обладает свойством $C'(1/6)$? Напомним, что свойство $C'(1/6)$ утверждает, что общие участки любых двух соотношений (и повторяющиеся участки в одном соотношении) составляют строго меньше $1/6$ от длины каждого из них.