ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ПОЛИНОМЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ В ЧИСТОй МАТЕМАТИКЕ

А. Г. Хованский

Оглавление

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Введение

Для заданной вещественной функции f *интерполяционный полином Лагранжа* — это полином степени $< n$, принимающий в n заданных вещественных точках (называемых *узлами интерполирования*) те же значения, что и функция f. Аналогично определяется полином Лагранжа над произвольным полем K. Интерполяционные полиномы Лагранжа задаются простыми явными формулами. Они интенсивно используются в прикладной математике. Но у них есть и совсем другие применения.

Полиномы Лагранжа помогают доказать многие теоремы и решить многие задачи из чистой математики. При этом для проведения доказательств в вырожденных случаях и при написании явных формул для решений задач в вырожденых ситуациях приходится использовать более сложные интерполяционные полиномы с кратными узлами интерполирования. Для заданной вещественной функции f *интерполяцонный полином с узлами* $\lambda_i \in \mathbb{R}$ *кратности* n_i, где $1 \leq i \leq k$, — это полином L степени $< n_1 + \cdots + n_k$, который в узлах λ_i удовлетворяет следующим n_i соотношениям: $L(\lambda_i) = f(\lambda_i), \ldots, L^{(n_i-1)}(\lambda_i) = f^{(n_i-1)}(\lambda_i)$. Аналогично определяется интерполяционный полином с кратными узлами интерполирования над другими полями, отличными от поля вещественных чисел.

В статье, во-первых, описывается простая и прозрачная теория интерполяционных полиномов Лагранжа с простыми узлами. К счастью, она наиболее употребима и позволяет решать задачи общего положения.

Во-вторых, описывается столь же простая, но более громоздкая теория интерполяционных полиномов Лагранжа с кратными узлами, позволяющая разбираться с вырожденными случаями.

Сначала мы рассматриваем задачи общего положения, затем переходим к задачам с вырождениями.

Применения интерполяционных полиномов, о которых идет речь в этой статье, основаны на решении следующей элементарной задачи, обобщающей школьную теоремы Безу:

Задача 1. *Найти остаток Q_1 при делении полинома Q (*большой степени*)* *на заданный полином P* (маленькой степени), *корни которого известны.*

Ответ. *Остаток Q_1 равен интерполяционному полиному функции Q с узлами интерполирования $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ кратностей $n_1, \ldots, n_k$, где λ_i — корень полинома P, а n_i — его кратность.*

Этот почти очевидный результат позволяет, например, вычислять полиномы и некоторые мероморфные функции от комплексной $n \times n$ матрицы, что нужно в целом ряде задач. Полиномы (и некоторые мероморфные функции, если $K = \mathbb{C}$) можно вычислять не только от комплексной матрицы, но и от элемента A алгебры V над полем K, обладающей единицей, $I \in V$. Нужно только, чтобы элемент A удовлетворял полиномиальному уравнению над полем K, т.е. чтобы для $A \in V$ выполнялось тождество $P(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_0 I = 0$, где $a_i \in K$ и P — некоторый полином степени n, имеющий n корней в поле K.

Если корни полинома P некратны, то все вычисления сводятся к полиномам Лагранжа с некратными узлами и особенно просты. Если P имеет кратные корни, то полиномы от элемента A тоже можно вычислять, но это труднее и требует техники интерполяционных полиномов с кратными узлами интерполирования.

Ниже мы приводим примеры элементов $A \in V$, удовлетворяющих полиномиальным уравнениям. Во всех этих примерах алгебра V является алгеброй линейных преобразований некоторого векторного пространства над полем K (алгебра V нужна только для того, что бы придать смысл полиномам от элемента A).

Начнем с двух примеров, в которых уравнение $P(A) = 0$ видно из условия задачи.

0.1. Реккурентные последовательности. Пусть $\mathbf{u} = u_0, u_1, \dots$ — бесконечная последовательность векторов u_i из некоторого векторного пространства M (возможно бесконечномерного) над полем K (пример $M = K$ весьма содержателен). Последовательность $\mathbf{u}$ удовлетворяет *реккурентному уравнению порядка n с постоянными коэффициентами* $a_0, \dots, a_{n-1} \in K$, если для любого $k \geq 0$ выполняется соотношение

$$a_o u_k + a_1 u_{k+1} + \dots + a_{n-1} u_{k+n-1} = u_{k+n}. \tag{1}$$

Свяжем с последовательностью (1) *характеристиский полином* $P(x) = x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \dots - a_0$ *и характеристическое уравнение*

$$P(x) = x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \dots - a_0 = 0. \tag{2}$$

Обозначим через H оператор сдвига, переводящий последовательность $\mathbf{u} = u_0, u_1, \dots$ в сдвинутую последовательность $H(\mathbf{u}) = u_1, u_2, \dots$. Из определения видно, что *если последовательность* $\mathbf{u}$ *удовлетворяет уравнению (1), то сдвинутая последовательность* $H(\mathbf{u})$ *тоже удовлетворяет уравнению (1).* Обозначим через $\mathcal{L}$ пространство всех бесконечных последовательностей, удовлетворяющих уравнению (1). Оператор сдвига H задает отображение $H : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ пространства $\mathcal{L}$ в себя.

В этом примере в качестве алгебры V можно взять алгебру всех линейных преобразований пространства решений $\mathcal{L}$. Алгебра V содержит оператор сдвига H.

Оператор H^m переводит последовательность $\mathbf{u}$ в m раз сдвинутую последовательность $u_m, u_{m+1}, \dots$.

Утверждение 0.1. *Оператор сдвига H на пространстве $\mathcal{L}$ решений реккурентного уравнения (1) удовлетворяет тождеству*

$$P(H) = H^n - a_{n-1}H^{n-1} - \dots - a_0 I = 0,$$

где P — характеристический полином (2).

Доказательство. Член последовательности $P(H)(\mathbf{u})$ с номером k равен $u_{k+n} - a_{n-1}u_{k+n-1} - \dots - a_0 u_k$. Равенство нулю членов последовательности $P(H)(\mathbf{u})$ со всеми номерами $k = 0, 1, \dots$ по определению означает, что последовательность $\mathbf{u}$ удовлетворяет реккурентному соотношению (1).

Полиномы Лагранжа позволяют, например, решить следующие задачи.

Задача A. *Написать формулу N-го члена u_N реккурентной последовательности* (1) *с начальными членами* $u_0, \dots, u_{n-1}$.

Задача B. *Для поля $K = \mathbb{C}$ в предположении, что в пространстве $\mathcal{L}$ введена разумная топология* (см. п. 1.4)*, для всякого комплексного t вычислить сумму ряда*

$$f(t) = \sum_{0\le N}^{\infty} \frac{u_N}{N!} t^N$$

для последовательности (1) *с начальными членами $u_0, \ldots, u_{n-1}$.*

Задачи A и B тесно связаны с линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами: решение задачи A дает возможность выписать общий член ряда Тейлора функции, удовлетворяющей дифференциальному уравнению, а решение задачи B дает возможность этот ряд просуммировать.

Задача C. *Для поля $K = \mathbb{C}$ в предположении, что в пространстве $\mathcal{L}$ введена разумная топология* (см. п. 1.4)*, для всякого комплексного λ, у которого модуль достаточно велик, вычислить сумму ряда*

$$\phi(\lambda) = \sum_{0\le N}^{\infty} \frac{u_N}{\lambda^{N+1}}$$

для последовательности (1) *с начальными членами $u_0, \ldots, u_{n-1}$.*

Функция ϕ из задачи C — это один из вариантов *производящей функции* последовательности u_N. Мы остановились именно на этом варианте производящей функции потому, что функция ϕ задается особенно простой формулой.

0.2. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Пусть L — конечномерное векторное пространство над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Вектор-функция $y : \mathbb{R} \to L$ удовлетворяет *линейному дифференциальному уравнению порядка n с постоянными коэффициентами* $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, если выполняется тождество

$$a_o y + a_1 y' + \cdots + a_{n-1} y^{(n-1)} = y^{(n)}. \tag{3}$$

С уравнением (3) связан *характеристический полином* $P(x) = x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \cdots - a_0$ *и характеристическое уравнение*

$$P(x) = x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \cdots - a_0 = 0. \tag{4}$$

Рассмотрим пространство $\mathcal{L}$ (априори оно могло бы быть бесконечномерным) решений уравнения (3), определенных на прямой $\mathbb{R}$. (Можно рассматривать пространство решений, определенных на любом интервале, содержащем точку t_0. Это ничего не меняет, и мы этого делать не будем.) Продифферницровав уравнение (3), получим, что *оператор дифферницирования D переводит пространство решений $\mathcal{L}$ в себя* , и, следовательно, задает отображение $D : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$.

В этом примере в качестве алгебры V можно взять алгебру всех линейных преобразований пространства решений $\mathcal{L}$. Алгерба V содержит оператор дифференцирования D.

Очевидно следующее

Утверждение 0.2. *Оператор дифференцирования D на пространстве $\mathcal{L}$ решений дифференциального уравнения (3) удовлетворяет тождеству*

$$P(D) = D^n - a_{n-1}D^{n-1} - \dots - a_0 I = 0,$$

где P — характеристический полином (4).

Задача I. *Найти решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (3) с начальными данными $y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_0^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}$.*

Интерполяционные полиномы Лагранжа помогают решить задачу I и доказать теорему существования и единственности для рассматриваемых дифференциальных уравнений.

Пусть $A : L \to L$ — линейное отображение конечномерного комплексного пространства L в себя.

Задача II. *Решить систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами $y' = Ay$ с начальными данными $y(t_0) = u$.*

Интерполяционные полиномы Лагранжа помогают решить задачу II и доказать теорему существования и единственности для рассматриваемой системы дифференциальных уравнений. Для применения интерполяционных полиномов к задаче II нужно найти полиномиальное уравнение, которому удовлетворяет оператор A (см. п. 0.4).

0.3. Минимальный полином элемента алгебры, удовлетворяющего алгебраическому уравнению. Ниже в теореме 0.6 приводится простое описание корней полинома минимальной степени, аннулирующего элемент алгебры. А сейчас обсудим обратимость полиномов от элемента алгебры, удовлетворяющего алгебраическому уравнению. Начнем со следующей элементарной задачи.

Задача 2. *Пусть задан полином $P \in K[x]$ степени n. Для полинома $Q \in K[x]$ найти полином $\bar{Q} \in K[x]$ степени $< n$, такой, что полином $Q\bar{Q} - 1$ делится на P.*

Утверждение 0.3. *Задача 2 разрешима, если и только если полином Q взаимно прост с полиномом P.*

Доказательство. Если полиномы Q и P имеют общий множитель L, то для всякого полинома $\bar{Q}$ полином $Q\bar{Q} - 1$ не делится на L и тем более не делится на P. Если наибольший общий делитель Q и P равен единице, то согласно алгоритму Евклида, существуют полиномы $\bar{Q}$ и P_1 такие, что $Q\bar{Q} - PP_1 = 1$ или $Q\bar{Q} - 1 = PP_1$.

Следствие 0.4. *Пусть полиномы Q и P взаимно просты, полином $\bar{Q}$ является решением задачи 2 и элемент $A \in V$ алгебры V удовлетворяет уравнению $P(A) = 0$. Тогда элемент $Q(A) \in V$ обратим и $Q^{-1}(A) = \bar{Q}(A)$.*

Доказательство. Справедливо сравнение $Q\bar{Q} \equiv 1 \mod P$. Но $P(A) = 0$, поэтому $Q(A)\bar{Q}(A) = I$.

Утверждение 0.5. *Пусть элемент $A \in V$ удовлетворяет уравнению $P(A) = 0$. Допустим, что для некоторого корня λ полинома P, лежащего в поле K, $\lambda \in K$, элемент $A - \lambda I$ обратим в алгебре V. Пусть P_1 полином, определенный тождеством $P(x) = (x - \lambda)P_1(x)$ наибольший общий делитель полиномов P и Q, и $P = LP_1$. Тогда $P_1(A) = 0$.*

Доказательство. Имеем, $P(A) = (A - \lambda I)P_1(A) = 0$. Умножая равенство $P(A) = L(A)P_1(A) = 0$ на $(A - \lambda I)^{-1}$, получим $P_1(A) = 0$.

Пусть элемент $A \in V$ удовлетворяет какому-либо полиномиальному уравнению $P(A) = 0$. *Минимальным полиномом M_A* элемента A назовем полином $M_A \in K[x]$ самой маленькой степени, аннулирующий элемент A и имеющий единичный коэффициент при старшей степени x. Следующая теорема описывает корни минимального полинома элемента $A \in K$, лежащие в поле K.

Теорема 0.6. *Точка $\lambda \in K$ является корнем полинома M_A, если и только если элемент $(A - \lambda I) \in V$ необратим.*

Доказательство. Поделим с остатком полимом M_A на полином $x - \lambda$. Получим $M_A(x) = (x - \lambda)M_1(x) + M_A(\lambda)$. Если λ не является корнем полинома M_A, то $-(x - \lambda)M_1(x)/M_A(\lambda) + M(A)(x)/M_A(\lambda) = 1$. Поэтому

$$(A - \lambda I)\frac{(-M_1(A))}{M_A(\lambda)} = I,$$

т.е. элемент $A - \lambda I$ имеет обратный элемент $-M_1(A)/M_A(\lambda)$. Отметим, что обратимость элемената $A - \lambda I$, при $M_A(\lambda) \neq 0$, вытекает также из следствия 0.4.

Если $M_A(\lambda) = 0$, то элемент $A - \lambda I$ не может быть обратимым. Действительно, в противном случае полином $M_A(x)/(x - \lambda)$ аннулирует элемент A (см. утверждение 0.5), что противоречит минимальности полинома M_A. Теорема 0.6 доказана.

Пусть $A \in V$ удовлетворяет уравнению $P(A) = 0$, где P — полином, все корни которого лежат в поле K. Тогда *все корни минимального полинома M_A элемента A лежет в поле K.* Действительно, минимальный полином M_A делит полином P (в протимном случае остаток от деления полинома P на полином M_A аннулирует элемент A и имеет меньшую степень, чем полином M_A, что невозможно).

0.4. Линейные операторы и алгебраические уравнения, которым они удовлетворяют. Обсудим полиномиальные уравнения, которым удовлетворяют линейные операторы.

Утверждение 0.7. *В алгебре V линейных операторов, действующих на n-мерном пространстве L над полем K, всякий оператор A удовлетворяет полиномиальному уравнению степени $\leq n$.*

Это простое утверждениые доказано чуть ниже. Как найти алгебраическое уравнение, которому удовлетворяет линейный оператор? Один из ответов (безусловно, самый замечательный) дает следующая теорема Гамильтона – Кэли.

Теорема Гамильтона–Кэли. *Всякий оператор $A : L \to L$, дейтвующий в конечномерном пространстве L, аннулируется своим характеристическим полиномом.*

Напомним, что *характеристический полином оператора A* — это определитель матрицы оператора $(A - \lambda I)$, рассматриваемый как функция параметра λ. (Любой оператор после фиксации базиса конечномерного пространства задается матрицей. Хотя матрица оператора зависит от выбора базиса, ее определитель от этого выбора не зависит). Докажем самый важный частный случай теоремы Гамильтона–Кэли — случай, когда корни характеристического уравнения некратны (по счастью, этот случай очень прост.)

Утверждение 0.8. *Теорема Гамильтона–Кэли справедлива для операторов, характеристическое уравнение которых имеет простые корни. Более того, для таких операторов характеристический полином является минимальным полиномом.*

Первое доказательство. Согласно утверждению 0.7, степень минимального полинома оператора A не превосходит размерности пространства, на котором он действует. Каждое собственное число λ оператора A является корнем его минимального полинома, т.к. оператор $A - \lambda I$ необратим (см. теорему 0.6). Поэтому все корни минимального полинома M_A однократны и являются собственными числами оператора A. Утверждение 0.8 доказано.

Ввиду важности утверждения 0.8 приведем еще одно его доказательство.

Второе доказательство. Напомним, что для оператора, характеристическое уравнение которого имеет простые корни, существует собственный базис, и в этом базисе он записывается матрицей $\tilde{A} = \{a_{i,j}\}$, на диагонали которой стоят собственные числа (т.е. $a_{i,i} = \lambda_i$, где λ_i — корень характеристического полинома), а все недиагональные элементы равны нулю. Для любого полинома Q матрица $Q(\tilde{A})$ тоже диагональна, и на диагонали стоят элементы $b_{i,i} = Q(\lambda_i)$. Характеристический полином P аннулирует собственные числа λ_i, поэтому он аннулирует оператор A.

Теорема Гамильтона–Кэли несложно выводится из утверждения 0.8. Приведем набросок этого вывода (ниже мы приведем другое, полное доказательство теоремы Гамильтона–Кэли). Пусть χ_A характеристический полином $n \times n$ матрицы A. Для почти всех $n \times n$ матриц A полином χ_A имеет лишь простые корни. Поэтому, согласно утверждению 0.8, для почти всех матриц A справедливо тождество $\chi_A(A) = 0$. Если полиномиальное тождество выполняется для почти всех матриц, то оно выполняется для всех матриц, что и доказывает теорему Гамильтона–Кэли.

Вообще говоря, характеристический полином оператора не обязательно является его минимальным полиномом. Может случиться, что оператор A аннулирует некоторый собственный делитель его характеристического полинома.

Пусть $A : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ — линейный оператор, действующий в векторном пространстве (возможно бесконечномерном) $\mathcal{L}$ над полем K. Пусть вектор $u \in \mathcal{L}$ содержится в некотором конечномерном подпространстве, инвариантном относительно действия оператора A. Несложно более или менее явно описать уравнение наименьшей степени, которому удовлетворяет ограничение оператора A на наименьшее инвариантное подпространство L_0, содержащее заданный вектор u.

Рассмотрим последовательность $\mathbf{u} = u_0, u_1, u_2, \dots$ векторов пространства L, в которой

(5) $$u_0 = u, u_1 = Au, u_2 = A^2u. \dots$$

Оператор сдвига H на последовательности (5) совпадает с действием оператора A: j-й член $(H\mathbf{u})_j$ последовательности $H\mathbf{u}$ получается из j-го члена последовательности (5) применением оператора A, т.е. $(H\mathbf{u})_j = Au_j$.

Пусть подпространство, натянутое на все члены последовательности (5), конечномерно. В этом случае существует натуральное число n, для которого выполняются следующие условия: 1) векторы $u_0, \dots, u_{n-1}$ линейно независимы, 2) вектор u_n представим в виде их линейной комбинации

(6) $$a_o u_0 + a_1 u_1 + \dots + a_{n-1} u_{n-1} = u_n.$$

Применяя к равенству (6) линейный оператор A^k, получим равенство

(7) $$a_o u_k + a_1 u_{k+1} + \dots + a_{n-1} u_{k+n-1} = u_{k+n}.$$

Утверждение 0.9. *Если выполнены условия* 1) *и* 2)*, то: а) последовательность* (5) *удовлетворяет соотношению* (7)*, б) пространство L_0, натянутое на векторы $u_0, \dots, u_{n-1}$, является минимальным подпространством, содержащим вектор u_0 и инвариантным относительно действия оператора A, с) для каждого вектора $v \in L_0$ из подпространства L_0 выполняется равенство*

(8) $$(a_o I + a_1 A + \dots + a_{n-1} A^{n-1})v = A^n v.$$

Ограничение оператора A на L_0 не удовлетворяет никакому уравнению степени $< n$

Доказательство. Проверим, что ограничение оператора A на L_0 удовлетворяет уравнению (8). По условию, набор векторов $u_0, \dots, u_{n-1}$ является базисом пространства L_0. Для вектора $v = u_k$ равевство (8) совпадает с равенством (7). Таким образом, равенство (8) справедливо для базисных векторов пространства L_0. По линейности оно справедливо для любого вектора этого пространства.

Докажем утверждение 0.7, сформулированное в начале этого пункта.

Доказательство утверждения 0.7. Индукция по размерности n. Пусть теорема уже доказана для всех пространств размерности $< n$. Докажем ее для n-мерного пространства $\mathcal{L}$. Если оператор A имеет k-мерное инвариантное подпространство $\mathcal{L}_1$, где $0 < k < n$, то по предположению индукции существует полином P_1 степени $\leq k$ и полином P_2 степени $\leq n-k$, такие, что оператор $P_1(A)$ аннулирует пространство $\mathcal{L}_1$, а оператор $P_2(A)$ аннулирует пространство $\mathcal{L}/\mathcal{L}_1$. Тогда, как легко видеть, оператор P_1P_2 степени $\leq n$ аннулирует пространство $\mathcal{L}$.

Пусть не существует нетривиального инвариантного подпространства относительно действия оператора A. Возьмем произвольный ненулевой вектор u. Вектора $u, Au, \dots, A^{n-1}u$ линейно независимы (иначе A имеет нетривиальное инвариантное подпроствансто). Поскольку размерность простанства $\mathcal{L}$ равна n, вектор A^n представим в виде линейной комбинатсии $A^n u = a_0 u + \cdots + A^{n-1}u$. В этом случае оператор A удовлетворяет уравнению $P(A) = 0$, где $P(x) = a_0 - a_1 x - \cdots - a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ — полином степени n.

0.5. Линейные операторы и полиномы Лагранжа. Пусть оператор A, действующий в векторном пространстве L (быть может бесконечномерном) над полем K, удовлетворяет известному полиномиальному уравнению $P(A) = 0$. Полиномы Лагранжа с узлами интерполирования, расположенными в корнях полинома P, позволяют:

1) Для любого полинома Q вычислить $Q(A)$, в частности, вычислить любую степень оператора A.

2) Для $\lambda \in K$, при условии $P(\lambda) \neq 0$, вычислить оператор $(A - \lambda I)^{-1}$.

3) Разложить пространство L в прямую сумму конечного числа инвариантных относительно A подпространств L_i, таких, что ограничение A на подпространство L_i есть $B_i + \lambda_i I$, где λ_i — корень полинома P и B_i — нильпотентный оператор (т.е. $B_i^{n_i} = 0$ для некоторого n_i). Здесь нужно дополнительно требовать, чтобы поле K содержало все корни λ_i полинома P. (Из существования разложения для конечномерного пространства L почти автоматически следует теорема Гамильтона–Кэли).

4) Для оператора A, действующего в конечномерном комплексном пространстве L, для любого $t \in \mathbb{C}$ вычислить оператор

$$\exp(At) = \sum_{0 \le N}^{\infty} \frac{A^N}{N!} t^N$$

.

5) Для оператора A, действующего в конечномерном комплексном пространстве L, найти решение задачи II, т.е. найти решение системы линейных дифференциальных уравнений $y' = Ay$ с начальным условием $y(t_0) = u$.

0.6. Что не вошло в статью и как она возникла. 1) Интерполяционные полиномы Лагранжа помогают написать явные формулы для решения алгебраических уравнений степени < 5 в радикалах. Дело здесь в следующем. Решение уравнений в радиках основано на том, что *конечная коммутативная группа матриц над полем K приводится к диагональному виду* (здесь дополнительно нужно требовать, чтобы поле K содержало все корни k-й степени из единицы, где k — порядок группы, и чтобы k не делилось на характеристику поля K). Интерполяционные полиномы Лагранжа помогают предъявить явную конструкцию приведения группы к диагоналпному виду. Именно это и нужно для предъявления явных формул решения уравнения степени < 5 в радикалах.

Я наткнулся на этот факт, обдумывая топологический вариант теории Галуа, над которым в то время работал. Оказалось, что ряд других утверждений теории Галуа, посуществу, основан на интерполяционных полиномах Лагранжа. Разрешимость в радикалах использует лишь весьма специальные полиномы Лагранжа, узлы интерполирования которых — корни простейшего уравнения $x^n = 1$.

2) Возникает естественный вопрос: а что можно делать, используя общие полиномы Лагранжа, узлы интерполирования которых лежат в корнях общего полиномиального уравнения $P(x) = 0$? Оказалось, что можно явно решать системы линейных дифференциальных уравнению с постоянными коэффициентами, находить явные формулы для членов реккурентных последовательностей и т.д. Мне показалось, что все это весьма интересно и что стоит об этом прочесть цикл лекций в Дубне.

3) Напомню еще одну классическую теорему. *Для достаточно общей системы из k полиномиальных уравнений степеней $m_1, \dots, m_k$ от k комплексных неизвестных справедлива следующая формула Эйлера – Якоби:* $\sum_{a \in A} \frac{Q}{J}(a) = 0$. Здесь A — множество корней системы, Q — любой полином степени $< m_1 + \dots + m_k - k$ и J — якобиан системы. Эта теорема имеет применения в вещественной алгебраической геометрии. Используя формулу Эйлера – Якоби, Петровский решил один из вопросов 16-й проблемы Гильберта; он доказал, что не существует вещественной проективной кривой степени 6, состоящей из 11 овалов, лежащих вне друг друга. Продолжая работы В.И. Арнольда[1] и И.Г Петровского[2], я нашел точную оценку суммы индексов особых точек вещественного векторного поля в $\mathbb{R}^n$, компоненты которого — полиномы фиксированных степеней[3]. Эта оценка существенно используют формулу Эйлера–Якоби. Знаменитая теорема Паскаля о шестиугольнике, вписанном в коническое сечение, тоже является прямым следствием этой формулы.

Формулу Элера – Якоби можно доказать, используя многомерное обобщение интерполяционных полиномов Лагранжа. Этот подход к формуле Эйлера–Якоби был открыт Кронекером[4].

И решения уравнений степени < 5, и формула Эйлера–Якоби тесно примыкают к тематике этой статьи. Я рассказывал о них на лекциях в Дубне, но не помещаю в статью — она и так слишком разрослась. О теории Галуа я недавно написал книжку, которая вот-вот выйдет из печати[5].

Не думаю, что статья содержит новые математические результаты. В ней идет речь о классике. Скорее статья представляет непривычный взгляд на хорошо известные факты.

Лекции в Дубне вызвали интерес. Кроме школьников, среди слушателей были и такие замечательные математики, как Д.В. Аносов и Ю.С. Ильяшенко. Они-то и посоветовали мне написать эту статью.

0.7. Расположение материала. В первом параграфе вычисляются функ-

[1]Арнольд В.И., Индекс особой точки векторного поля, неравенства Петровского–Олейник и смешанные структуры Ходжа, Функц. анализ 12, вып. 1 (1978), 1–14.

[2]Петровский И.Г., Олейник О.А., О топологии действительных алгебраических поверхностей, Изв. АН СССР, серия матем. 13 (1949), 389–402.

[3]Хованский А.Г., Индекс полиномиального векторного поля, Функц анализ, вып. 1 (1979), 49–58.

[4]L. Kronecker's Werke, Uber einige Interpolationsformeln fur ganze Funktion mehrar Variabeln, v.1 (1895), 133–141.

[5]Хованский А.Г., Теория Галуа, накрытия и римановы поверхности.

ции от элемента алгебры, удовлетворяющего алгебраическому уравнению с простыми корнями. Вычисления несложны: мы применяем лишь полиномы с простыми узлами интерполирования и обобщение школьной теоремы Безу, позволяющее при помощи интерполяционных полиномов вычислять остаток от деления одного полинома на другой.

Во втором параграфе мы предъявляем решения сформулированных выше задач A, B и C про реккурентные последовательности. Приводим явные решения линейного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами и системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентани, и доказываем для таких уравнений и систем теорему существования и единственности. Приводим явные формулы для обращения линейного оператора и явные формулы для разложения пространства в сумму инвариантных подпроставнств относительно действия оператора. Все перечисленные задачи решаются лишь в случае общего положения, если полиномиальные уравнения, связанные с задачами, не имеют кратных корней.

В третьем параграфе развивается теория интерполяционных полиномов с кратными узлами интерполирования. Мы обсуждаем несколько подходов к построению таких полиномов. В конце параграфа перечисляются все возможные интерполяционные полиномы с суммарной кратностью узлов, не превосходящей три.

В четвертом параграфе мы вычисляем функции от элемента алгебры, удовлетворяющего алгебраическому уравнению, не предполагая, что уравнение имеет лишь простые корни. Результаты параграфа 4 вполне аналогичны результатам параграфа 1, но они опираются на интерполяционные полиномы с кратными узлами интерполирования и значительно более громоздки.

Пятый параграф вполне аналогичен второму параграфу. Мы решаем те же задачи, но не предполагаем, что полиномиальные уравнения, связанные с задачами, имеют лишь простые корни.

1. Функции от элемента алгебры, удовлетворяющего алгебраическому уравнению с простыми корнями

В этом параграфе вычисляются функции от элемента алгебры, удовлетворяющего алгебраическому уравнению с простыми корнями. Вычисления основаны на интерполяционных полиномах с простыми узлами интерполирования.

1.1. Явная формула для интерполяционного полинома Лагранжа. Пусть $P(x) = c(x-\lambda_1)...(x-\lambda_n)$ — полином степени n, имеющий простые корни в узлах интерполирования $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$. Полином P определен однозначно с точностью до выбора константы $c \in K$. Полином

$$P_{(\lambda_i)}(x) = \frac{\prod\limits_{1\le j\le n}(x-\lambda_j)}{\prod\limits_{1\le j\le n, j\ne i}(\lambda_i-\lambda_j)} = \frac{P(x)}{P'(\lambda_i)(x-\lambda_i)}$$

в узле λ_i равен единице и в остальных узлах интерполирования обращается в нуль. Степень полинома $P_{(\lambda_i)}$ равна $n-1$. Полином $L(x) = \sum\limits_{i=1}^{i=n} a_i P_{(\lambda_i)}(x)$

имеет степень $< n$, и его значение в узле интерполирования λ_i равно a_i. Полином, обладающий перечислеными свойствами, единственен. Действительно, разность двух полиномов, обладающих перечисленными свойствами, является полиномом степени $< n$, равным нулю в n узлах интерполирования и, следовательно, тождественно равным нулю.

Определение. Пусть $X \subset K$ подмножество поля K, содержащее узлы интерполирования. Для всякой функции $Q : X \to K$ ее *интерполяционным полиномом Лагранжа с узлами интерполирования* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ называется полином L степени $< n$, значения которого в узлах интерполирования совпадают со значениями функции Q.

Задача Лагранжа. *Для заданной функции $Q : X \to K$ построить ее интерполяционный полином Лагранжа L с узлами интерполирования $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.*

Согласно проделанным вычислениям, интерполяционный полином L функции Q равен $L(x) = \sum\limits_{i=1}^{i=n} Q(\lambda_i) P_{(\lambda_i)}(x)$.

Примеры. 1) Интерполяционный полином Лагранжа с узлами $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ полинома $Q(x) = x^N$, где $N \in \mathbb{Z}$, $N \geq 0$, равен $\sum\limits_{i=1}^{i=n} \lambda_i^N P_{(\lambda_i)}(x)$.

2) Если множество узлов интерполирования не содержит точки $0 \in K$, то определен интерполяционный полином Лагранжа рациональной фунции x^N, где $N \in \mathbb{Z}$, $N < 0$. Этот полином задается той же формулой, что и полином из предыдущего примера.

3) Если множество узлов интерполирования не содержит точки $\lambda \in K$, то определен интерполяционный полином Лагранжа рациональной фунции $1/(\lambda - x)$. Этот полином равен

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{P_{(\lambda_i)}(x)}{(\lambda - \lambda_i)}.$$

4) В поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ определена функция $Q(x) = \exp(tx)$, где $t \in \mathbb{C}$ — параметр. Для этой функции интерполяционный полином с узлами $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ равен $\sum\limits_{i=1}^{i=n} \exp(t\lambda_i) P_{(\lambda_i)}(x)$.

Произвольный полином Q над полем K можно рассматривать как функцию $Q : K \to K$. Покажем, что интерполяционный полином Лагранжа этой функции доставляет обобщение школьной теоремы Безу.

1.2. Обобщение школьной теоремы Безу (случай простых корней). Применения полиномов Лагранжа, о которых идет речь в этой статье, основаны на обобщении школьной теоремы Безу. Напомним эту теорему.

Школьная теорема Безу. *Для всякого полинома Q от одной переменной x остаток от деления Q на полином $(x - a)$ равен значению $Q(a)$ полинома Q в точке a.*

Доказательство. Пусть $Q(x) \equiv M(x)(x - a) + Q_1$, где Q_1 — константа и M — полином. Полагая в этом тождестве $x = a$, получим $Q_1 = Q(a)$, что и требовалось доказать.

Задача 1 (случай простых корней). *Для всякого полинома Q от одной переменной x найти остаток от деления Q на заданный полином P степени n, имеющий некратные корни $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.*

Ответ на эту задачу дает следующая

Обобщенная теорема Безу (случай простых корней). *Остаток от деления полинома Q на полином P равен интерполяционному полиному Лагранжа функции Q с узлами интерполирования $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.*

Доказательство. Пусть $Q(x) \equiv M(x)P(x) + Q_1(x)$, где Q_1 и M — полиномы, причем степень полинома Q_1 строго меньше n. Полагая в этом тождестве $x = \lambda_i$, получим $Q_1(\lambda_i) = Q(\lambda_i)$. Поэтому остаток Q_1 является интерполяционным полиномом функции Q с узлами интерполирования $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Соединяя доказанную теорему с результатом предыдущего пункта, получим следующее

Слествие 1.1. *Остаток Q_1 от деления полинома Q на полином P задается формулой*

$$Q_1(x) = \sum_{1 \le i \le n} Q(\lambda_i) P_{(\lambda_i)}(x).$$

Пример. Остаток Q_1 от деления полинома $Q = x^N$, где $N \in \mathbb{Z}$, $N > 0$, на полином P задается формулой

$$Q_1(x) = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i^N P_{(\lambda_i)}(x).$$

Мы предполагали, что полином P имеет лишь простые корни. Это предположение почти всегда выполнено (два корня наугад взятого полинома могут совпасть лишь случайно). Поэтому рассмотренный случай самый важный. Случай кратных корней требует изучения интерполяционных полиномов с кратными узлами, и мы его обсудим позже.

1.3. Полиномы от элемента алгебры, удовлетворяющего алгебраическому уравнению с простыми корнями. Рассмотрим алгебру V над полем K, обладающую единичным элементом $I \in V$. Пусть элемент A алгебры V удовлетворяет полиномиальному уравнению

$$P(A) = A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_0 I = 0, \tag{9}$$

где $a_i \in K$, и P — полином степени n, все корни которого лежат в поле P.

В этом параграфе мы, как правило, будем дополнительно предполагать, что все корни $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ полинома P различны между собой. В дальнейшем мы избавимся от этого доположлнительного предположения. Для всякого полинома Q с коэффициентами в поле K вычислим элемент $Q(A)$ алгебры V, зная, что A удовлетворяет уравнению (9).

Утверждение 1.2. *Для всякого полинома Q справедливо равенство $Q(A) = Q_1(A)$, где Q_1 — остаток от делении полинома Q на полином P.*

Доказательство. Поделим с остатком полином Q на полином P. Получим представление полинома Q в виде $Q = Q_1 + MP$, где M — некоторый полином. Имеем, $Q(A) = Q_1(A) + M(A)P(A)$. По условию $P(A) = 0$, поэтому $Q(A) = Q_1(A)$.

Следствие 1.3. *Пусть все корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ полинома P различны между собой. Тогда для всякого полинома Q справедливо равенство $Q(A) = Q_1(A)$, где Q_1 — интерполяционный полином функции Q с узлами интерполирования $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.*

Доказательство. Следствие вытекает из утверждения 1.2 и из обобщенной теоремы Безу (в случае простых корней) (см. п. 1.2).

Теорема 1.4. *Пусть все корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ полинома P различны между собой. Тогда, для всякого полинома Q и элемента A, удовлетворяющего уравнению (9), справедливо равенство*

$$Q(A) = \sum_{0 \le i \le n} Q(\lambda_i) P_{(\lambda_i)}(A),$$

где $P_{(\lambda_i)}$ — базисные полиномы для инперполяционной задачи с узлами интерполирования $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Доказательство. Теорема вытекает из следствия 1.3 и из формулы для интерполяционного полинома (см. п. 1.1).

Удобное обозначение. Пусть $Q(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$ — полином над полем K и $u_0, \ldots, u_k$ — последовательность векторов из векторного пространства M над полем K. *Вектор $(a_0 u_0 + a_1 u_1 + \cdots + a_k u_k) \in M$ удобно обозначать сиволом $Q\langle u_0, \ldots, u_k \rangle$.*

В этих обозначениях равенство из теоремы 1.4 можно записать в виде

$$Q(A) = \sum_{0 \le i \le n} Q(\lambda_i) P_{(\lambda_i)} \langle A^0, \ldots, A^{n-1} \rangle,$$

где, как обычно, A^0 обозначает элемент I.

Нам понадобится небольшая модификация теоремы 1.4. Пусть алгебра V является алгеброй всех линейных преобразований векторного пространства $\mathcal{L}$ над полем K. Пусть также фиксировано линейное отображение $\pi : \mathcal{L} \to M$, где M — некоторое векторное пространство над полем K. Для всякого полинома Q и всякого вектора $u \in \mathcal{L}$ вычислим вектор $\pi(Q(A)u)$.

Теорема 1.4$'$. *Пусть все корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ полинома P различны между собой. Тогда для оператора A, удовлетворяющего уравнению (9), для всякого полинома Q и всякого вектора $u \in \mathcal{L}$ справедливо равенство*

$$\pi(Q(A)u) = \sum_{1 \le i \le n} Q(\lambda_i) \pi(P_{(\lambda_i)}(u)) = \sum_{1 \le i \le n} Q(\lambda_i) P_{(\lambda_i)} \langle \pi(u), \pi(Au), \ldots, \pi(A^{n-1}u) \rangle.$$

Теорема 1.4$'$ доказывается точно также, как теорема 1.4.

1.4. Аналитические функции от элемента алгебры, удовлетворяющего алгебраическому уравнению с простыми корнями. В этом пункте мы будем считать, что поле K является полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Скажем, что векторное пространство M (которое может быть бесконечномерным), наделено *разумной топологией*, если любое линейное отображение $T : \mathbb{C}^k \to M$ любого конечномерного пространства $\mathbb{C}^k$, наделенного обычной топологией, в M непрерывно. Обычная топология в конечномерном пространстве $\mathbb{C}^N$, конечно, является разумной. Допустим, что комплексная алгебра V, рассматриваемая как векторное пространство над полем комплексных чисел, обладает разумной топологией. Тогда при некоторых ограничениях, можно определить не только полиномы, но и аналитические функции от ее элементов.

Пусть F — функция комплексного переменного, заданная в некотором круге $|z| < r$ как сумма степенного ряда $F(z) = \sum\limits_{0\leq i} c_i z^i$ по степеням переменной z. Пусть для некоторого элемента A алгебры V последовательность элементов $S_m(A) = \sum\limits_{0\leq i\leq n} c_i A^i$ при $m \to \infty$ сходится в алгебре V к элементу B. В этом случае говорят, что определено *значение* $F(A) = B$ *аналитической функции* F *на элементе* A.

Пусть элемент $A \in V$ удовлетворяет алгебраическому уравнению (9) над полем комплексных чисел $K = \mathbb{C}$.

Теорема 1.5. *Пусть все корни* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *полинома* P *различны между собой. Пусть* F *— аналитическая функция, заданная рядом* $F = \sum\limits_{0\leq i} c_i z^i$, *радиус сходимости* r *которого удовлетворяет неравенству* $|\lambda_i| < r$ *для всех корней* λ_i *полинома* P. *Тогда определено значение* $F(A)$ *аналитической функции* F *на элементе* A, *причем*

$$F(A) = \sum_{1\leq i\leq n} F(\lambda_i) P_{(\lambda_i)}(A).$$

Доказательство. Частичные суммы $S_m(z) = \sum\limits_{0\leq i\leq n} c_i z^i$ в круге $|z| < r$ при $m \to \infty$ сходятся к $F(z)$. Теорема 1.4 позволяет вычислить элемент $S_m(A)$:

$$S_m(A) = \sum_{1\leq i\leq n} S_m(\lambda_i) P_{(\lambda_i)}(A).$$

Используя сходимость комплексных степенных рядов и разумность топологии в алгебре V, получаем, что элементы $S_m(A)$ при $m \to \infty$ сходятся в алгебре V и их предел задается приведенной в теореме формулой.

Модифицируем теорему 1.5. Пусть V — алгебра линейных операторов на векторном пространстве $\mathcal{L}$ над полем $\mathbb{C}$ и M — векторное пространство над $\mathbb{C}$, наделенное некоторой разумной топологией. Пусть фиксировано линейное отображение $\pi : \mathcal{L} \to M$. Рассмотрим функцию F комплексного переменного, заданную в некотором круге $|z| < r$ как сумма степенного ряда $F(z) = \sum\limits_{0\leq i} c_i z^i$ по степеням переменной z. Пусть для некоторого элемента A алгебры V и для некоторого вектора $u \in M$ пространства

M существует предел векторов $\pi(S_m(A)u)$ при $m \to \infty$, равный вектору $B \in M$. В этом случае будем говорить, что определено *значение функции* $\pi(F(A)u)$ и что оно равно вектору B.

Пусть элемент $A \in V$ удовлетворяет алгебраическому уравнению (9) над полем комплексных чисел $K = \mathbb{C}$.

Теорема 1.5$'$. *Пусть все корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ полинома P различны между собой. Пусть F — аналитическая функция, заданная рядом $F = \sum_{0 \leq i} c_i z^i$, радиус сходимости r которого удовлетворяет неравенству $|\lambda_i| < r$ для всех корней λ_i полинома P. Тогда для каждого вектора $u \in M$ определено значение $\pi(F(A)u)$, причем*

$$\pi(F(A)u) = \sum_{1 \leq i \leq n} F(\lambda_i) P_{(\lambda_i)} \langle \pi u, \pi(Au), \ldots, \pi(A^{n-1}u) \rangle.$$

Теорема 1.5$'$ доказывается точно также, как теорема 1.5.

1.5. Рациональные и мероморфные функции от элемента алгебры, удовлетворяющего алгебраическому уравнению с простыми корнями. Пусть полином $P \in K[x]$ имеет лишь простые корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. В этом случае справедлива следующая теорема.

Обращение полинома (случай простых корней). *Если полином Q взаимно прост с полиномом P, то полином $\bar{Q}$, решающий задачу (2) из п. 0.3, равен интерполяционному полиному Лагранжа функции Q^{-1} с узлами интерполирования $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.*

Доказательство. Пусть полином $\bar{Q}$ является решением задачи (2) (согласно утверждению 0.3, в условиях теоремы решение задачи (2) существует). Тогда найдется полином P_1, такой, что $Q(x)\bar{Q}(x) - 1 = P(x)P_1(x)$. Полагая в этом тождестве $x = \lambda_i$, получим $\bar{Q}(\lambda_i) = Q^{-1}(\lambda_i)$. Так как степень полинома $\bar{Q}$ меньше n, он является интерполяционным полиномом функции Q^{-1} с узлами интерполирования $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Пусть элемент $A \in V$ удовлетворяет уравнению $P(A) = 0$.

Следствие 1.6. *Пусть все корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ полинома P различны между собой, полином Q взаимно прост с полиномом P и элемент A алгебры V удовлетворяет уравнению $P(A) = 0$. Тогда элемент $Q(A) \in V$ обратим и*

$$Q^{-1}(A) = \sum_{1 \leq k \leq n} Q^{-1}(\lambda_i) P_{(\lambda_i)}(A).$$

Доказательство. Действительно, в силу сравнения $Q\bar{Q} - 1 \equiv 0 \mod P$, элемент $\bar{Q}(A)$ обратен к элементы $Q(A)$. Полином $\bar{Q}$ — это интерполяционный полином функции Q^{-1} с узлами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, что и доказывает следствие.

Пусть $T, Q \in K[x]$ — полиномы, не имеющие общего делителя, и $R = T/Q$ — рациональная функция. Пусть $A \in V$ — элемент алгебры V над полем K, для которого элемент $Q(A) \in V$ обратим. Тогда элемент $T(A)Q^{-1}(A)$ называется *значением рациональной функции R на элементе A.*

Теорема 1.7. *Пусть все корни $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ полинома P различны между собой, полином Q взаимно прост с полиномом P и элемент $A \in V$ алгебры V удовлетворяет уравнению $P(A) = 0$. Тогда определено значение рациональной функции $R = T/Q$ на элементе A и справедлива формула*

$$R(A) = \sum_{1 \le k \le n} R(\lambda_i) P_{(\lambda_i)}(A).$$

Доказательство. Согласно следствию имеем $Q^{-1}(A) = \sum\limits_{1 \le k \le n} Q^{-1}(\lambda_i) P_{(\lambda_i)}(A)$. Согласно теореме 1.4 имеем $T(A) = \sum\limits_{1 \le k \le n} T(\lambda_i) P_{(\lambda_i)}(A)$. Перемножив $T(A)$ и $Q^{-1}(A)$ (учитывая тождества $P^2_{(\lambda_i)} = P_{(\lambda_i)}$ и $P_{(\lambda_i)} P_{(\lambda_j)} = 0$ при $i \ne j$), получим $R(A) = \sum\limits_{1 \le k \le n} T(\lambda_i) Q^{-1}(\lambda_i) P_{(\lambda_i)}(A) = \sum\limits_{1 \le k \le n} R(\lambda_i) P_{(\lambda_i)}(A)$.

Следствие 1.8. Пусть $\lambda \in K$ — элемент поля K, такой, что $P(\lambda) \ne 0$. Тогда

$$(A - \lambda I)^{-1} = \sum_{1 \le k \le n} \frac{P_{(\lambda_i)}(A)}{(\lambda_i - \lambda)}.$$

Доказательство. Следствие получается применением теоремы к рациональной функции $R(x) = 1/(x - \lambda)$.

Пусть F и G — функции комплексного переменного, заданные в круге $|z| < r$ как суммы сходящихся рядов по переменной z. Пусть $G = F/G$ — меромофная функция в круге $|z| < r$, представленая в виде отношения функций F и G. Пусть $A \in V$ — элемент алгебры V над полем C, для которого определены элементы $F(A)$ и $G(A)$, причем элемент $G(A)$ обратим. Тогда элемент $F(A)G^{-1}(A)$ называется *значением мероморфной функции $G = F/G$ на элементе A.*

Пусть элемент $A \in V$ удовлетворяет алгебраическому уравнению (9) над полем комплексных чисел $K = \mathbb{C}$.

Теорема 1.9. *Пусть все корни $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ полинома P различны между собой. Пусть F и G — функции комплексного переменного, заданные в некотором круге $|z| < r$ как суммы сходящихся рядов по степеням переменной z. Пусть для всех корней λ_i полинома P выполняются неравенства $|\lambda_i| < r$ и $G(\lambda_i) \ne 0$. Тогда определено значение $\Phi(A)$ мероморфной функции $\Phi = F/G$ на элементе A, причем*

$$\Phi(A) = \sum_{1 \le i \le n} \Phi(\lambda_i) P_{(\lambda_i)}(A).$$

Доказательство. Согласно теореме 1.5, определены значения $F(A)$ и $G(A)$ аналитических фукций F и G на элементе A. Из теоремы 1.5 видно, что $F(A) = F_1(A)$ и $G(A) = G_1(A)$, где F_1 и G_1 — интерполяционные полиномы функций F и G с узлами интерполирования $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Рациональная фунция F_1/G_1 имеет в точках λ_i те же значения, что и функция $\Phi = F/G$. Теперь теорема 1.9 сводится к теореме 1.7 для рациональной фунции $R = F_1/G_1$.

1.6. Алгебра функций на конечном множестве точек и интерполяционные полиномы. Рассмотрим конечное множество точек $\Lambda \subset K$. Алгебра функций K_Λ на множестве Λ со значениями в поле K теснейшим образом связана с задачей интерполирования, в которой множество узлов равно Λ.

Рассмотрим гомоморфизм $\pi : K[x] \to K_\Lambda$ кольца полиномов над полем K в алгебру K_Λ, сопоставляющий каждому полиному его ограничение на множество $\Lambda \subset K$. Обозначим через $K_{n-1}[x] \subset K[x]$ подпространство в $K[x]$, состоящее из полиномов степени $< n$. Пусть P — полином с простыми корнями, множество корней которого совпадает с множеством Λ.

Утверждение 1.10. *Ограничение $\pi : K_{n-1}[x] \to K_\Lambda$ гомоморфизма π на $K_{n-1}[x]$ является изоморфизмом линейных пространств. Полином M переходит в нуль при гомоморфизме π, если и только если M делится на P. Гомоморфизм π задает изоморфизм фартор-кольца $K[x]/(P)$ кольца полиномов по идеалу (P), состоящему из полиномов, делящихся на P, и алгебры K_Λ.*

Доказательство. Для всякой функции $f : \Lambda \to K$ ее интерполяционный полином Лагранжа с узлами в Λ принимает на Λ те же значения, что и f. Остальные пункты утверждения очевидны.

В алгебре функций K_Λ есть естественный базис. Он состоит из функций δ_{λ_i}, равных единице в точке λ_i и обращающихся в нуль в остальных точках множества Λ. По оределению, базисный интерполяционный полином $P_{(\lambda_i)}$ при горморфизме π переходит в функцию δ_{λ_i}.

Утверждение 1.11. *1. Для базисных интерполяционных полиномов P_{λ_i} справедливы следующие сравнения:*

1) $P_{(\lambda_1)} + \dots + P_{(\lambda_n)} \equiv 1 \mod P$,

2) при $i \neq j$ $P_{(\lambda_i)} P_{(\lambda_j)} \equiv 0 \mod P$,

3) $P^2_{(\lambda_i)} \equiv P_{(\lambda_i)} \mod P$,

4) $xP_{(\lambda_i)} \equiv \lambda_i P_{(\lambda_i)} \mod P$.

Доказательство. В алгебре функций K_Λ на множестве Λ, очевидно, выполнены следуюшие равенства: 1) $\delta_{\lambda_1} + \dots + \delta_{\lambda_n} = 1$, где 1 — функция на Λ, тождественно равная 1; 2) при $i \neq j$ $\delta_{\lambda_i}\delta_{\lambda_j} = 0$, где 0 — функция на Λ, тождественно равная 0; 3) $\delta^2_{\lambda_i} = \delta_{\lambda_i}$, 4) $\pi(x)\delta_{\lambda_i} = \lambda_i \delta_{\lambda_i}$, где $\pi(x)$ — ограничение на Λ функции x, принимающее значение λ_i в точке $\lambda_i \in \Lambda$. Теперь утверждение 1.11 вытекает из утверждения 1.10.

2. Операторы, реккурентные и дифференциальные уравнения (случай простых корней)

Приведем некоторые применения вычислений функций от элемента $A \in V$ из параграфа 1.

2.1. Оператор, удовлетворяющий полиномиальному уравнению с простыми корнями. Рассмотрим векторное пространство $\mathcal{L}$ (возможно, бесконечномерное) над полем K и алгебру V линейных операторов в пространстве $\mathcal{L}$. Пусть элемент A алгебры V удовлетворяет полиномиальному уравнению (9).

В этом параграфе мы, как правило, будем дополнительно предполагать, что все корни $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ полинома P различны между собой. В пятом параграфе мы избавимся от этого доположительного предположения

Обозначим через $\Lambda = \{\lambda_i\}$ множество корней полинома P. Оператор $P_{(\lambda_i)}(A)$, где $P_{(\lambda_i)}$ — базисный интерполяционный полином, назовем *резольвентой Лагранжа оператора A*, соответствующей корню λ_i полинома P.

К оператору A применимы все результаты предыдущего параграфа. Например, если $\lambda \in K$ не содержится в множестве Λ корней полинома P, то, согласно следствию 1.8, *оператор $A - \lambda I$ обратим, причем*

$$(A - \lambda I)^{-1} = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{P_{(\lambda_i)}(A)}{(\lambda_i - \lambda)}.$$

Оператор A кроме того, что является элементом алгебры V, действует на пространстве $\mathcal{L}$. Результаты параграфа 1 позволяют явно разложить пространство $\mathcal{L}$ в прямую сумму подпространств, собственных относительно действия оператора A. Для каждого вектора $u \in \mathcal{L}$ вектор $u_{(\lambda_i)} = P_{(\lambda_i)} u$ будем называть *резольвентой Лагранжа,* соответствующей корню λ_i полинома P, *вектора x.*

Теорема 2.1. *Пусть оператор A удовлетворяет уравнению $P(A) = 0$, где P — полином с множеством корней Λ, все корни которого некратны. Тогда:*

1. Резольвенты Лаграмжа $P_{(\lambda_i)}(A)$ оператора A удовлетворяют следующим соотношениям: $P_{(\lambda_1)}(A) + \dots + P_{(\lambda_n)}(A) = I$, $P_{(\lambda_i)}(A) P_{(\lambda_j)}(A) = 0$ при $i \neq j$, $P^2_{(\lambda_i)}(A) = P_{(\lambda_i)}(A)$, $AP_{(\lambda_i)}(A) = \lambda_i P_{(\lambda_i)}(A)$.

2. Пусть $\mathcal{L}_i$ — образ $\mathcal{L}$ под действием оператора $P_{(\lambda_i)}(A)$. Тогда пространство $\mathcal{L}$ раскладывается в прямую сумму пространст $\mathcal{L}_i$ (некоторые из пространст $\mathcal{L}_i$ могут быть равны нулю). Ненулевое пространство $\mathcal{L}_i$ является собственным для оператора A с собственным числом λ.

3. Всякий вектор $u \in \mathcal{L}$ представим в виде суммы своих резольвент Лагранжа, т.е. $u = u_{(\lambda_i)} + \dots + u_{(\lambda_n)}$. При этом ненулевые резольвенты $u_{(\lambda_i)}$ вектора u линейно независимы и являются собственными векторами оператора A с собственными числами λ_i.

Доказательство. Все утверждения теоремы являются формальными следствиями сравнений из утверждения 1.11. Докажем некоторые из них. Тождество $P_{(\lambda_1)}(A) + \dots + P_{(\lambda_n)}(A) = I$ — следствие сравнения 1) из утверждения 1.11. Из этого тождества вытекает равенство $u_{(\lambda_1)} + \dots + u_{(\lambda_n)} = u$. Сумма $v_1 + \dots + v_n$ ненулевых векторов вида $v_i = P_{(\lambda_1)}(A) u_i$ не может обращаться в нуль. Действительно, умножая равенство $\sum P_{(\lambda_i)}(A) u_i = 0$ на оператор $P_{(\lambda_j)}(A)$, получим $\sum P_{(\lambda_i)}(A) P_{(\lambda_j)}(A) u_i = 0$. Следовательно, $P_{(\lambda_j)}(A) u_j = v_j = 0$. В силу тождества $AP_{(\lambda_i)}(A) = \lambda_i P_{(\lambda_i)}(A)$, резольвента Лагранжа $u_{(\lambda_i)} = P_{(\lambda_i)}(A) u$ вектора u при действии оператора A умножается на λ_i, т.е. если $u_{(\lambda_i)} \neq 0$, то $u_{(\lambda_i)}$ — собственный вектор оператора A с собственным числом λ_i.

2.2. Реккурентные последовательности (случай простых корней). Перейдем к решению задач А,B и С о реккурентных последовательностях из п. 0.1. Мы будем пользоваться обозначениями из п. 0.1.

Рассмотрим отображение π из пространства $\mathcal{L}$ в пространство M, сопоставляющее последовательности $\mathbf{v}$ ее начальный элемент v_0, т.е. для $\mathbf{v} = v_0, v_1, \dots$ по определению $\pi(\mathbf{v}) = v_0$. Для оператора сдвига H имеем $\pi(H^k\mathbf{v}) = v_k$.

Пусть последовательность $\mathbf{u} = u_0, u_1, \dots$ удовлетворяет реккурентному уравнению (1) с начальными данными $u_0, \dots, u_{n-1}$. *Для $k = 1, \dots, n-1$ известны вектора $\pi(H^k(\mathbf{u}))$: именно, $\pi(H^k(\mathbf{u})) = u_k$.* Согласно утверждению 0.1, оператор H удовлетворяет уравнению $P(H)\mathbf{u} = 0$.

Предположим дополонительно, что хартеристический полином P имеет простые корни $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Применяя теорему 1.4$'$, мы можем для всякого решения $\mathbf{u} \in \mathcal{L}$ реккурентного уравнения (1) и для всякого полинома Q над полем K вычислить первый элемент $\pi(Q(H)(\mathbf{u}))$ последовательности $Q(H)(\mathbf{u})$. Для полинома $Q(x) = x^N$ элемент $\pi(H^N)(\mathbf{u})$ равен u_N, и мы получаем решение задачи А.

Пусть $K = \mathbb{C}$ — поле комплексных чисел, пусть в M введена разумная топология, и пусть $F(x)$ — аналитическая функция комплексного переменного x, ряд Тейлора в точке нуль которой сходится при $|x| < r$ и $r > |\lambda_i|$ при $i = 1, \dots, n$. Применяя теорему 1.5$'$, мы можем вычислить первый элемент $\pi(F(H)(\mathbf{u}))$ последовательности $F(H)(\mathbf{u})$. Ряд Тейлора в точке нуль функции $F(x) = t\exp x$ сходится на всей комплексной прямой. Используя приведенное рассуждение для функции $F(x) = t\exp x$, мы получаем решение задачи B. Ряд Тейлора в точке 0 функции $F(x) = 1/(\lambda - x)$ 0 равен $\sum x^N/\lambda^{N+1}$ (действительно, $1/(\lambda - x) = (1/\lambda)(1 - x/\lambda)^{-1} = \sum x^N/\lambda^{N+1}$). Этот ряд сходится при $|x| < |\lambda|$. Используя приведенное рассуждение для функции $F(x) = 1/(\lambda - x)$ при $|x| < |\lambda|$ получим решение задачи С.

Обсудим ответы для задач А, В и С подробнее.

Пусть $P_{(\lambda_i)}$ — базисные полиномы для интерполяции с некратными узлами, расположенными в корнях $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ характеристического уравнения. Используя интерполяцию полинома x^N с некратными узлами (см. п 1.1), получим следующее

Решение задачи А (случай простых корней). *Для последовательности $\mathbf{u}$, удовлетворяющей реккурентному уравнению (1) с некратными корнями $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ характеристического уравнения (2), справедливо тождество*

$$u_N = \sum_{1 \le i \le n} \lambda_i^N P_{(\lambda_i)} \langle u_0, \dots, u_{n-1} \rangle.$$

Пример. Пусть последовательность $\mathbf{u} = u_0, u_1, \dots$ удовлетворяет реккурентному уравнению (1) второго порядка $a_0u_k + a_1u_{k+1} = u_{k+2}$ с начальными данными u_0 и u_1. Пусть характеристическое уравнение (2) имеет различные корни $\lambda_1, \lambda_2 \in K$.

Воспользовавшись формулой из п. 3.9 получим, что интерполяционный полином функции x^N с узлами λ_1, λ_2 равен

$$\frac{\lambda_1^N - \lambda_2^N}{\lambda_1 - \lambda_2}x + \frac{-\lambda_1^N\lambda_2 + \lambda_2^N\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Поэтому в рассматриваемом примере

$$u_N = \frac{\lambda_1^N - \lambda_2^N}{\lambda_1 - \lambda_2}u_1 + \frac{-\lambda_1^N\lambda_2 + \lambda_2^N\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}u_0.$$

Решение задачи В **(случай простых корней).** *Для последовательности* $\mathbf{u}$*, удовлетворяющей реккурентному уравнению (1) с некратными корнями* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *характеристического уравнения (2), справедливо тождество*

$$\sum_{0\le N}^{\infty} \frac{u_N}{N!} t^N = \sum_{1\le i\le n} \exp(\lambda_i t) P_{(\lambda_i)} \langle u_0, \dots, u_{n-1} \rangle.$$

Пример. Рассмотрим последовательность $\mathbf{u} = u_0, u_1, \dots$ из предыдущего примера, предполагая дополнительно, что $K = \mathbb{C}$ и что в пространстве M введена разумная топология.

Воспользовавшись формулой из п. 3.9 получим, что интерполяционный полином функции $\exp(tx)$ с узлами λ_1, λ_2 равен

$$\frac{\exp(\lambda_1 t) - \exp(\lambda_2 t)}{\lambda_1 - \lambda_2} x + \frac{-\lambda_2 \exp(\lambda_1 t) + \lambda_1 \exp(\lambda_2 t)}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Поэтому в рассматриваемом примере

$$\sum_{0\le N}^{\infty} \frac{u_N}{N!} t^N = \frac{\exp(\lambda_1 t) - \exp(\lambda_2 t)}{\lambda_1 - \lambda_2} u_1 + \frac{-\lambda_2 \exp(\lambda_1 t) + \lambda_1 \exp(\lambda_2 t)}{\lambda_1 - \lambda_2} u_0.$$

Решение задачи С (случай простых корней). *Для последовательности* $\mathbf{u}$*, удовлетворяющей реккурентному уравнению (1) с некратными корнями* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *характеристического уравнения (2), для* $\lambda \in \mathbb{C}$*, удовлетворяющего неравенству* $|\lambda| > |\lambda_i|$*, при* $i = 1, \dots, n$*, справедливо тождество*

$$\sum_{0\le N}^{\infty} \frac{u_N}{\lambda^{N+1}} = \sum_{1\le i\le n} \frac{P_{(\lambda_i)} \langle u_0, \dots, u_{n-1} \rangle}{\lambda - \lambda_i}.$$

Действительно, интерполяционный полином Лагранжа L с узлами интерполирования $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ для функции $F(x) = 1/(\lambda - x)$ задается следующей формулой:

$$L = \sum_{1\le i\le n} \frac{P_{(\lambda_i)}(x)}{\lambda - \lambda_i}.$$

Пример. Рассмотрим последовательность $\mathbf{u} = u_0, u_1, \dots$ из предыдущего примера, предполагая дополнительно, что $K = \mathbb{C}$ и что в пространсве M введена разумная топология.

Воспользовавшись формулой из п. 3.9 получим, что интерполяционный полином функции $1/(\lambda - x)$ с узлами λ_1, λ_2 равен

$$\frac{x}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)} + \frac{\lambda - (\lambda_1 + \lambda_2)}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)}.$$

Поэтому в рассматриваемом примере при $|\lambda| > |\lambda_1|$ и $|\lambda| > |\lambda_2|$ справедливо тождество

$$\sum_{0\le N}^{\infty} \frac{u_N}{\lambda^{N+1}} = \frac{u_1 + [\lambda - (\lambda_1 + \lambda_2)] u_0}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)}.$$

2.3. Реккурентные последовательности и дифференциальные уравнения (случай простых корней). Интересные примеры реккурентных последовательностей возникают в связи с решением линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Мы будем пользоваться обозначениями из п. 0.2. Пусть известно, что вектор-функция y является решением задачи I . Найдем значение N-й производной вектор-функции y в точке t_0 и просуммируем ряд Тейлора в точке T_0 вектор-функции y.

Дифференцируя уравнение (3) k раз, получим:

$$a_o y^{(k)} + a_1 y^{k+1} + \dots + a_{n-1} y^{(k+n-1)} = y^{(k+n)}. \tag{10}$$

Обозначим через u_m значение $y^{(m)}(t_0)$ производной $y^{(m)}$ порядка m вектор-функции y в точке t_0. Если вектор-функция y удовлетворяет уравнению (3), то согласно (10), последовательность $\mathbf{u} = u_0, u_1 \dots$ ее производных в точке t_0 удовлетворяет реккурентному соотношению

$$a_o u_k + a_1 u_{k+1} + \dots + a_{n-1} u_{k+n-1} = u_{k+n} \tag{11}$$

и имеет начальные данные $u_0 = y_0, \dots, u_{n-1} = y_0^{(n-1)}$.

Теорема 2.2. *Если вектор-функция y — решение задачи* I, *характеристическое уравнение (4) которой имеет простые корни $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, то:*

1) N-я производная $y^{(N)}$ вектор-функции y в точке t_0 равна

$$y^{(N)}(t_0) = \sum_{1 \le i \le n} \lambda_i^N P_{(\lambda_i)} \langle y_0, \dots, y_0^{(n-1)} \rangle,$$

2) сумма ряда Тейлора вектор-функции y в точке t_0 задается следующей формулой:

$$\sum_{0 \le N}^{\infty} \frac{u_N}{N!}(t-t_0)^N = \sum_{1 \le i \le n} \exp \lambda_i (t-t_0) P_{(\lambda_i)} \langle y_0, \dots, y_0^{(n-1)} \rangle.$$

Доказательство. Теорема вытекает из решения задач A и B для последовательностей с некратными корнями характеристического уравнения.

Пример. Пусть вектор-функция y удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка $a_0 y + a_1 y' = y''$ с начальными данными $y(t_0) = y_0$ и $y'(t_0) = y'(t_0)$, характеристическое уравнение которого имеет различные корни $\lambda_1, \lambda_2 \in K$. Тогда:

1) $y^{(N)}(t_0) = \dfrac{\lambda_1^N - \lambda_2^N}{\lambda_1 - \lambda_2} y_0' + \dfrac{-\lambda_1^N \lambda_2 + \lambda_2^N \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} y_0$;

2) $\displaystyle\sum_{0 \le N}^{\infty} \frac{y^{(N)}(t_0)}{N!}(t - t_0)^N = \frac{\exp \lambda_1 (t-t_0) - \exp \lambda_2 (t-t_0)}{\lambda_1 - \lambda_2} y_0' + {}$
$+ \dfrac{-\lambda_2 \exp \lambda_1 (t-t_0) + \lambda_1 \exp \lambda_2 (t-t_0)}{\lambda_1 - \lambda_2} y_0$.

Во-первых, найденные в теореме 2.2 суммы рядов Тейлора являются решениями дифференциального уравнения. Во-вторых, уравнение не имеет других решений, кроме найденных в теореме 2.2 сумм. И то, и другое мы докажем в следующем пункте, используя полиномы Лагранжа другим способом. Решение из следующего пункта задачи I полностью согласуется с найденными выше суммами, но оно никак не зависит от приведенных выше вычислений. В этом пункте мы скорее демонстровали метод работы с реккурентными последовательностями, чем решали дифференцальное уравнение. Впрочем, конечно, теорему 2.2 несложно довести до полного решения задачи I.

2.4. Линейные дифференциальные уравнения и полиномы Лагранжа (случай простых корней). В этом пункте мы докажем следующую теорему.

Теорема 2.3. *Функция* $\mathbf{y}(t)$*, определенная формулой*

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{1\le i\le n} \exp\lambda_i(t-t_0)P_{(\lambda_i)}\langle y_0,\dots,y_0^{(n-1)}\rangle,$$

является решением задачи I*, характеристическое уравнение которой имеет простые корни* $\lambda_1,\dots,\lambda_n$*, и других решений у задачи* I *нет.*

Приводимое ниже доказательство состоит из проверки трех простых утверждений и доказательства теоремы 2.7.

Увержение 2.4. *Вектор-функция* $y(t) = \exp\lambda(t-t_0)y_0$ *удовлетворяет дифференциальному уравнению* $y' = \lambda y$ *с начальным условием* $y(t_0) = y_0$*. Других решений с этим начальным условием у уравнения* $y' = \lambda y$ *нет.*

Доказательство. Функция $\exp\lambda(t-t_0)y_0$, очевидно, удовлетворяет уравнению и начальному условию. Пусть $y(t)$— какое-либо другое решение этого уравнения. Тогда функция $u(t) = \exp-\lambda(t-t_0)y(t)$ имеет нулевую производную. Действительно, $u' = -\lambda\exp-\lambda(t-t_0)y(t)+\exp-\lambda(t-t_0)y'(t) = -\lambda\exp-\lambda(t-t_0)y(t)+\lambda\exp-\lambda(t-t_0)y(t) = 0$. Следовательно, функция u постоянна и равна y_0. Откуда $y(t) = \exp\lambda(t-t_0)u(t) = \exp\lambda(t-t_0)y_0$.

Утверждение 2.5. *Для любого набора векторов* $v_1\dots,v_n \in L$ *функция* $y(t) = \sum\limits_{1\le i\le n} v_i\exp\lambda_i(t-t_0)$*, где* λ_i *— корни характеристического уравнения (4), удовлетворяет уравнению (3).*

Доказательство. Достаточно проверить, что функция $v_i\exp\lambda_i(t-t_0)$ является решением уравнения (3). Так как λ_i корень характеристического уравнения, полином P представим в виде $P(x) = P_i(x)(x-\lambda_i)$, где P_i — некоторый полином. Следовательно, оператор $P(D)$ равен $P_i(D)(D-\lambda_i I)$. Оператор $(D-\lambda_i I)$ аннулирует функцию $v_i\exp\lambda_i(t-t_0)$. Поэтому оператор $P = P_1(D-\lambda_i I)$ тем более аннулирует эту функцию.

Утверждение 2.5 дает достаточный запас решений уравнения (3), чтобы удовлетворить любым начальным данным. Проверим это.

Утверждение 2.6. *Для любого набора начальных данных* $y_0\dots,y_0^{(n-1)} \in L$ *существует решение вида* $y(t) = \sum\limits_{1\le i\le n} v_i\exp\lambda_i(t-t_0)$*, имеющее заданные начальные данные.*

Доказательство. Вектора $v_1, \ldots, v_n$ должны удовлетворять системе уравнений $\sum\limits_{1 \le i \le n} v_i = y_0$, $\sum\limits_{1 \le i \le n} \lambda_i v_i = y_0^{(1)}, \ldots,$ $\sum\limits_{1 \le i \le n} \lambda_i^{n-1} v_i = y_0^{(n-1)}$. Определитель этой системы является определителем Вандермонда. Он не равен нулю. Система, следовательно, имеет решение и при том единственное.

Замечание. Для систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка факты, аналогичные утверждениям 2.5, 2.6 (и содержащие их как частные случаи), автоматически сводятся к резольвентам Лагранжа и не требуют никаких определителей (см. п. 2.5).

Перейдем теперь к основному утверждению настоящего пункта. Докажем, что задача I не имеет никаких других решений, кроме решений из утверждения 2.6.

Рассмотрим пространство $\mathcal{L}$ (априори оно могло бы быть бесконечномерным) решений уравнения (3). Согласно утверждению 2, оператор дифференцирования D на пространстве $\mathcal{L}$ удовлетворяет уравнению

$$a_o I + a_1 D + \cdots + a_{n-1} D^{(n-1)} = D^{(n)}.$$

Теорема 2.7. *Пусть характеристическое уравнение (4) имеет некратные корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Тогда для всякого решения y задачи* I*:*

1) вектор-функция $y_{\lambda_i} = P_{(\lambda_i)}(D) y$, являющаяся резольвентой Лагранжа вектор-функции y относительно оператора D для корня λ_i, удовлетворяет дифференциальному уравнению $y'_{\lambda_i} = \lambda_i y_{\lambda_i}$ с начальным условием $y'_{\lambda_i}(t_0) = P_{(\lambda_i)}\langle y_0, \ldots, y_0^{(n-1)}\rangle$;

2) решение y является суммой своих резольвент Лагранжа:

$$y = y_{(\lambda_1)} + \cdots + y_{(\lambda_n)}.$$

Доказательство. Теорема 2.7 немедленно следует из теоремы 2.1.

Итак, резольвенты Лагранжа позволяют сводить общее уравнение (3), для которого характеристическое уравнение (4) имеет простые корни, к уравнениям $y'_{\lambda_i} = \lambda_i y_{\lambda_i}$, начальные данные для которых находятся по начальным данным $y_o, \ldots, y_{n-1}$ исходного уравнения по следующим формулам: $y_i(t_0) = P_{(\lambda_i)}\langle y_0, \ldots, y_0^{(n-1)}\rangle$. Мы закончили доказательство теоремы 2.3.

2.5. Система линейных дифференциальных уравнений (случай простых корней). Пусть $A : L \to L$ — линейное отображение конечномерного комплексного пространства L в себя. Допустим, что оператор A удовлетворяет полиномиальному уравнению (9) из п. 1.3.

Утверждение 2.8. *Если полином P имеет лишь простые корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, то для любого $t \in \mathbb{R}$ оператор $\exp At = \sum_{0 \le N}^{\infty} A^N t^N / N!$ определен корректно и задается формулой*

$$\exp(At) = \sum_{0 \le N}^{\infty} \frac{A^N}{N!} t^N = \sum_{1 \le i \le n} \exp(\lambda_i t) P_{(\lambda_i)}(A).$$

Доказательство. Утверждение вытекает из теоремы 1.5.

Перейдем к задаче II о решении системы линейных дифференциальных уравнений $y' = Ay$ с начальными данными $y(t_0) = u$.

Теорема 2.9. *Если полином P имеет лишь простые корни $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, то решение задачи* II *существует, единственно и задается формулой*

$$y(t) = \sum_{1 \le i \le n} \exp(\lambda_i(t - t_0)) P_{(\lambda_i)} \langle u, Au, \dots, A^{n-1}u \rangle.$$

Доказательство. 1) Покажем, что если существует решение задачи II, то оно задается приведенной формулой. Действительно, пусть вектор-функция $y(t)$ удовлетворяет тождеству $y' = Ay$. Дифференцируя k раз это тождество, получим $y^{(k+1)} = A^k y$. Так как оператор A удовлетворяет уравнению $P(A) = 0$, то вектор-функция y удовлетворяет уравнению $P(D)y = 0$, где D — оператор дифференцирования. Поскольку полином P имеет лишь простые корни, мы можем применить теорему 2.7, согласно которой решение $y = \sum_{1 \le i \le n} \exp(\lambda_i(t - t_0)) P_{(\lambda_i)} \langle y_0, y_0^1, \dots, y_0^{n-1} \rangle$. Осталось заметить, что $y(t_0) = u,\ y^{(1)}(t_0) = Au, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = A^{n-1}u$.

2) Покажем, что функция y, заданная приведенная формулой, действительно, является решением задачи II. Оператор $A : L \to L$, по условию, удовлетворяет полиномиальному ураненению $P(A) = 0$ с простыми корнями $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Вектор $u \in L$ является суммой $u = \sum_{1 \le i \le n} u_{(\lambda_i)}$ своих резольвент Лагранжа $u_{(\lambda_i)} = P_{(\lambda_i)}(A)u$ отосительно оператора A, и каждая не равная нулю резольвента Лагранжа является собственным векторов оператора A, именно $Au_{(\lambda_i)} = \lambda_i u_{(\lambda_i)}$. Поэтому функция $y_i(t) = \exp(\lambda_i(t - t_0))\lambda_i u_{(\lambda_i)}$ является решением рассматриваемой системы с начальным условием $y_i(t_0) = u_{(\lambda_i)}$. Следовательно, сумма $\sum_{1 \le i \le n} y_i(t)$ является решением системы с начальным условием $u = \sum_{1 \le i \le n} u_{(\lambda_i)}$.

3. Интерполяционный полином Лагранжа с кратными узлами интерполирования

В этом параграфе описываются интерполяционные полиномы с кратными узлами интерполирования и обсуждаются способы построения таких полиномов.

3.1. Тип интерполяционной задачи. При интерполировании с кратными узлами встречается следующая ситуация. В поле K задано множество Λ, состоящее из k точек, называемых *узлами интерполирования*. Каждому узлу $\lambda_i \in \Lambda$ приписана некоторая *кратность* $n_i > 0$. Сумма кратностей $n = n_1 + \dots + n_k$ называется *порядком интерполяционной задачи*. В задаче интерполирования узел кратности n_i встречаться n_i различными способами, занумерованными числами от нуля до $n_1 - 1$ (в узле кратности n_i можно задать либо значение функции, либо значение ее первой производной и т.д., либо значение ее производной порядка $n_1 - 1$). Поэтому для нумерации узлов (точнее, для нумерации способов их использования) удобно заранее заготовить множество J из n элементов, состоящее из пар (i, j), где $1 \le i \le k,\ 0 \le j < n_i,\ n_1 + \dots + n_k = n$, упорядоченных в лексекографическом порядке (т.е., если пары множества J располагать в порядке возрастания, то сначала надо расположить пары $(1, 0), \dots, (1, n_1 - 1)$, затем пары $(2, 0), \dots, (2, n_2 - 1)$ и т.д.). В соответствии с этим порядком, каждая пара (i, j) приобретает некоторый номер

$m(i,j)$. Таким образом, каждому элементу множества J сопоставлено число $1 \le m \le k$ и наоборот. Фиксируем нумерацию узлов множества Λ числами от 1 до k и сопоставим m-му способу использования узла λ_i точку $(i,m) \in J$. Интерполяционную задачу с узлами кратностей $n_1, \dots n_k$ и фиксированной нумерацией способов их использования элементами множества J будем называть *интерполяционной задачи типа J*.

3.2. Струи и полиномы Тейлора функций, заданных на поле K. Рассмотрим полином Q от переменной x над полем K. Полином $Q_{[\lambda,k]}$ степени $\le k$ называется *струей порядка k* или *полиномом Тейлора порядка k* функции Q в точке $\lambda \in K$, если разность $Q - Q_{[\lambda,k]}$ делится на полином $(x-\lambda)^{k+1}$. Полином Q можно переписать как функцию от переменной $(x-\lambda)$, т.е. представить Q в виде $Q(x) = \sum\limits_{0 \le j} a_{i,j}(x-\lambda_i)^j$. Используя это переразложение, струю $Q_{[\lambda,k]}$ можно записать в виде $Q_{[\lambda,k]} = \sum\limits_{0 \le j \le k} a_{i,j}(x-\lambda_i)^j$.

Струи определены не только для полиномов, но и для некоторых других функций $Q : X \to K$, где $X \subset K$. Например, для рациональной функции $R = Q_1/Q_2$, являющейся отношением двух взаимнопростых полиномов Q и P, струя любого порядка определена в каждой точке множества $X = K \setminus S$, где $S \subset K$ — множество нулей полинома P. Полином $R_{[\lambda,k]}$ степени $\le k$ называется *струей порядка k рациональной функции R в точке* $\lambda \in X$, если рациональная функция $R - R_{[\lambda,k]}$ представима в виде $(x-\lambda)^{k+1}R_1$, где R_1 — рациональная функция, определенная в точке λ. Полином $R_{[\lambda,k]}$ называется также *полиномом Тейлора порядка k функции R в точке* λ. Полином $R_{[\lambda,k]}$ можно вычислить следующим образом. Переразложить полиномы Q и P по степеням переменной $(x-\lambda)$. Вычислить частное Q/P в кольце формальных по переменной $(x-\lambda)$ с точностью до членов степеней $> k$. В результате получится полином степени k, который и есть искомый полином $R_{[\lambda,k]}$.

В классическом анализе понятие k-струи и полинома Тейлора порядка k определено для многих функций вещественного и комплексного переменного. Нужно лишь требовать, чтобы функция вещественного переменного была достаточное число раз дифференцируема, а функция комплексного переменного была аналитической в окрестности рассматриваемой точки.

3.3. Постановка задачи интерполирования с кратными узлами. Пусть J— множество, состоящее из пар чисел (i,j), где $1 \le i \le k$, $0 \le j < n_i$, снабженных лексекографическим порядком и $\Lambda \subset K$ — упорядоченное подмножество точек поля K, содержащих k узлов кратностей $n_1, \dots, n_k$.

Пусть задано отображение $a : J \to K$, или, другими словами, пусть задан набор $\{a_{i,j}\} \in K$ элементов поля K, занумерованный элементами (i,j) множества J. Полином L степени $< n$, струя порядка $n_i - 1$ которого в точке λ_i равна $\sum\limits_{j=0}^{n_i-1} a_{i,j}(x-\lambda_i)^j$, называется *интерполяционным полиномом Лагранжа с узлами интерполирования λ_i кратности n_i и начальными данными $\{a_{i,j}\}$*.

Задача 1. *По заданным начальным данным $\{a_{i,j}\} \in K$, $(i,j) \in J$, построить интерполяционный полином Лагранжа с узлами интерполирования $\lambda_1, \dots, \lambda_k$*

кратностей $n_1, \dots, n_k$.

Определение. Пусть $X \subset K$ — подмножество поля K, содержащее узлы интерполирования, и $Q : X \to K$ функция, для которой в узлах $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ определены струи порядков $n_1 - 1, \dots, n_k - 1$. Полином L степени $< n = n_1 + \dots + n_k$ называется *интерполяционным полиномом функции* Q *с узлами* $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ *кратностей* $n_1, \dots, n_k$, если в каждом узле λ_i функции Q и L имеют одинаковые струи порядка $n_i - 1$.

Задача 1 часто встречается в форме следующей задачи Лагранжа.

Задача Лагранжа. *Для заданной функции* $Q : X \to X$ *построить ее интерполяционный полином Лагранжа* L *с узлами интерполирования* $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ *кратностей* $n_1, \dots, n_k$.

Разумеется, задача Лагранжа имеет смысл, только если определены струи $Q_{[\lambda_i, n_i - 1]}$ функции Q в узлах интерполирования. Задача Лагранжа эквивалентна задаче 1 (если, разумеется, мы умеем вычислять струи заданных порядков функции Q).

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что характеристика поля K *равна нулю или что она больше чем кратность любого из узлов интерполирования.* При этом предположении коэффициент $a_{i,k}$ равен $Q(k)(x_i)/k!$. В противном случае это не так: в поле, характеристика которого $\leq k$, нельзя делить на $k!$.

Утверждение 3.1. *Задача 1 для любых начальных данных и любого набора узлов, имеющих любые кратности, имеет решение, и это решение единственно.*

Доказательство. Будем искать интерполяционный полином Лагранжа методом неопределенных коэффициентов. Пусть $L(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_{n-1} x^{n-1}$, где c_i — неизвестные элементы поля K. Полином L является решением задачи 1, если и только если для любых $(i, j) \in J$ выполняется уравнение $L^{(j)}(\lambda_i) = j!\, a_{i,j}$. Возникает система из n линейных уравнений от n неизвестстных $c_0, \dots, c_{n-1}$. Соответствующая ей однородная система уравнений имеет только нулевое решение. Действительно, решению этой системы соответствует интерполяционный полином с нулевыми начальными данными, т.е. полином степени $< n$, имеющий корни $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ суммарной кратности n. Следовательно, этот полином тождественно равен нулю. Мы доказали, что однородная система имеет только нулевое решение. Поэтому задача 1 имеет решение, и это решение единственно.

3.4. Определение базисных интерполяционных полиномов. Среди решений задачи 1 выделяются басизные полиномы.

Определение. *Базисным полиномом типа* $(i, j) \in J$ для задачи 1 с узлами $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ называется полином $P_{(\lambda_i, j)}$ степени $< n$, являющийся интерполяционным полиномом с заданными узлами, для которого все начальные данные $\{a_{m,q}\} \in K$, кроме элемента $a_{i,j}$, равны нулю, а элемент $a_{i,j}$ равен единице.

Зная базисные интерполяционные полиномы всех типов $(i, j) \in J$, легко написать формулу для интерполяционного полинома Лагранжа с любыми начальными данными.

Утверждение 3.2. *Интерполяционный полином для начальных данных* $\{a_{i,j}\}$ *равен* $\sum\limits_{(i,j)\in J} a_{i,j}P_{(\lambda_i,j)}(x)$. *Интерполяционный полином* L *функции* Q *равен*

$$L(x) = \sum_{(i,j)\in J} \frac{Q^{(j)}(\lambda_i)}{j!} P_{(\lambda_i,j)}(x).$$

Доказательство. Действительно, написанный полином имеет степень $< n$. В узлах интерполирования λ_i он с точностью до членов порядка $(x-\lambda_i)^{n_i}$ совпадает с полиномом $\sum\limits_{0\le j<n_i} a_{i,j}(x-\lambda_i)^j$ (совпадает с полиномом $L = \sum\limits_{0\le j<n_i} \frac{Q^{(j)}(\lambda_i)}{j!}(x-\lambda_i)^j$).

Примеры. 1) Интерполяционный полином Лагранжа с узлами $\lambda_1,\dots,\lambda_k \in K$ кратностей $n_1,\dots,n_k$ полинома $Q(x) = x^N$, где $N \in \mathbb{Z}$, $N \ge 0$, равен

$$\sum_{(i,j)\in J} C_N^j \lambda_i^{N-j} P_{(\lambda_i,j)}(x),$$

где C_N^j — биномиальный коэффициент.

2) Если множество узлов интерполирования не содержит точки $0 \in K$, то определен интерполяционный полином Лагранжа рациональной фунции x^N, где $N \in \mathbb{Z}$, $N < 0$. Этот полином задается той же формулой, что и полином из предыдущего примера.

3) Если множество узлов интерполирования не содержит точки $\lambda \in K$, то определен интерполяционный полином Лагранжа рациональной фунции $1/(\lambda - x)$. Этот полином равен

$$\sum_{(i,j)\in J} \frac{P_{(\lambda_i,j)}(x)}{(\lambda-\lambda_i)^j}.$$

4) В поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ определена функция $Q(x) = \exp(tx)$, где $t \in \mathbb{C}$ — параметр. Для этой функции интерполяционный полином с узлами $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{C}$ кратностей $n_1,\dots,n_k$ равен

$$\sum_{(i,j)\in J} \frac{t^j \exp(t\lambda_i)}{j!} P_{(\lambda_i,j)}(x).$$

Интерполяционный полином Лагранжа L для полинома Q степени $< n$ совпадает с полиномом Q. Согласно примеру 1), для полинома $Q = x^N$ это означает, что при $N = 0,\dots,n-1$ справедливо тождество:

$$\sum_{(i,j)\in J} C_N^j \lambda_i^{N-j} P_{(\lambda_i,j)}(x) \equiv x^N. \tag{12}$$

Утверждение 3.3. *Полиномы $P_{(\lambda_i,j)}$ удовлетворяют системе (2) из n линейных уравнений с невырожденой матрицей $M_{((i,j),N)} = \{C_N^j \lambda_i^{N-j}\}$, индексы (i,j) и N которой пробегают множества J и $0,\dots,n-1$ из n элементов, и с правой частью, равной вектору $(1,x,\dots,x^{n-1})$.*

Доказательство. Осталось показать, что матрица системы невырождена. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\sum_{1\le i\le k, 0\le N<n} C_N^j \lambda_i^{N-j} c_N = a_{i,j}, \tag{13}$$

для коэффициентов интерполяционного полинома $L(x) = \sum\limits_{0\le N<n} c_N x^N$ с узлами λ_i кратностей n_i и начальными данными $\{a_{i,j}\}$. Система (13) имеет единственное решение, и, следовательно, ее определитель не равен нулю. Но матрица системы (12) совпадает с транспонированной матрицей системы (13) и имеет, следовательно, тот же определитель.

В п. 3.8 мы явно вычислим определитель матрицы системы (12), и, применяя правило Крамера к системе (12), получим явные формулы для базисных полиномов. А сейчас обсудим обобщение школьной теоремы Безу.

3.5. Обобщение школьной теоремы Безу. Перенесем результат пункта 1.2 на случай полинома P, имеющего кратные корни. Для нас центральную роль будет играть следующая

Задача. *Для всякого полинома Q от одной переменной x найти остаток от деления Q на заданный полином P степени n, имеющий корни $\lambda_1,\dots,\lambda_k$, кратность которых равна $n_1,\dots,n_k$, где $n_1+\dots+n_k=n$.*

Ответ на эту задачу дает следующая

Обобщенная теорема Безу. *Остаток от деления полинома Q на полином P равен интерполяционному полиному функции Q с узлами интерполирования $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ кратностей $n_1,\dots,n_k$.*

Доказательство. Пусть $Q(x) \equiv M(x)P(x) + Q_1(x)$, где Q_1 и M — полиномы, причем степень полинома Q_1 строго меньше n. В точке λ_i струя полинома P порядка $n_i - 1$ равна нулю, так как по условию полином P имеет корень кратности n_i в узле λ_i. Поэтому для всякого $1 \le i \le k$ струи порядка $n_i - 1$ у полиномов Q_1 и Q совпадают. Следовательно, остаток Q_1 является интерполяционным полиномом функции Q с узлами интерполирования $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ кратностей $n_1,\dots,n_k$.

С одной стороны, зная базисные интерполяционные полиномы $P_{(\lambda_i,j)}$, остаток Q_1 можно записать абсолютно явно. Действительно, справедливо следующее

Слествие 3.4. *Остаток Q_1 от деления полинома Q на многочлен P задается формулой*

$$Q_1(x) = \sum_{(i,j)\in J} \frac{Q^{(j)}(\lambda_i)}{j!} P_{(\lambda_i,j)}(x).$$

С другой стороны, обобщенная теорема Безу доставляет способ вычисления интерполяционных полиномов Лагранжа с кратными узлами интерполирования. Для этого нам понадовится разложение рациональной функции в правильную дробь.

3.6. Интерполяционные полиномы и правильные дроби. Пусть $R = Q/P$ — рациональная функция, знаменатель которой — полином $P(x) = \prod_{i=1}^{k}(x-\lambda_i)^{n_i}$ степени n с корнями $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ кратностей $n_1, \dots, n_k$, где $n_i > 0$ и $\sum n_i = n$.

Разложением рациональной функции R в *правильную дробью* называется ее представление в виде

$$R = \sum_{1 \le i \le k} [R]_{\lambda_i} + [R]_\infty, \tag{14}$$

где $[R]_\infty$ — полином и $[R]_{\lambda_i}$ — рациональные функция вида

$$[R]_{\lambda_i}(x) = \sum_{1 \le j \le n_i} \frac{c_{i,j}}{(x-\lambda_i)^j}. \tag{15}$$

Рациональная функция $[R]_{\lambda_i}$, фигурирующая в равенстве (15), называется *главной частью* функции R в точке λ_i. Хорошо известно, что рациональная функции (знаменатель которой является произведением линейных множителей) раскладывается в правильную дробь. Для корня λ_i обозначим через $\tilde{P}_i$ полином $\tilde{P}_i(x) = P(x)/(x-\lambda_i)^{n_i}$.

Главную часть $[R]_{\lambda_i}$ функции $R = Q/P$ в корне λ_i можно вычислить следующим образом. Сначала в корне λ_i можно найти полиномы Тейлора порядка $n_i - 1$ функций Q и $\tilde{P}_i$. Затем в кольце формальных рядов по переменной $(x - \lambda_i)$ можно с точностью до членов степеней $\ge n_i$ поделить первый полином Тейлора на второй. В результате получится полином степени $n_i - 1$ по переменной $(x-\lambda_i)$. Для нахождения главной части $[R]_{\lambda_i}$ осталось поделить полученный полином на $(x - \lambda_i)^{n_i}$. Обозначим через $[R]$ рациональную функцию, равную сумме гланых частей функции R по всем корным полинома P, т.е. $[R] = \sum_{1 \le i \le k} [R]_{\lambda_i}$

Теорема 3.5. *Остаток Q_1 при делинии полинама Q на полином P удовлетворяет тождеству $Q_1 = [R]P$.*

Доказательство. Рациональная функция $[R]P$ являтся полиномом, так как знаменатель $(x-\lambda_i)^{n_i}$ рациональной функции $[R]_{\lambda_i}$ делит полином P. Степень полинома $[R]P$ меньше чем n, так как числитель рациональной функции $[R]_{\lambda_i}$ имеет степень меньшую чем n_i. Умножая равенство $R = [R] + [R]_\infty$ на полином P, получим соотношение $Q = [R]P + [R]_\infty P$. Из этого соотношения вытекает, что $Q_1 = [R]P$.

Следствие 3.6. *Интерполяционный полином Лагранжа L полинома Q с множеством узлов интерполирования, совпадающим с множеством корней полинома P, рассматриваемых с учетом кратности, равен произведению полинома P на сумму главных частей $[R]$ рациональной функции $R = Q/P$.*

Пусть, например, полином $P = (x-\lambda_1)\dots(x-\lambda_n)$ имеет лишь простые корни. Тогда, как легко видеть, сумма главных частей рациональной функции Q/P равна

$$\frac{Q(\lambda_1)}{P'(\lambda_1)(x-\lambda_1)} + \dots + \frac{Q(\lambda_n)}{P'(\lambda_n)(x-\lambda_n)}.$$

Умножая эту сумму на полином P, получим знакомую формулу интерполяционного полинома L полинома Q с некратными узлами интерполирования $\lambda_1, \dots, \lambda_n$:

$$L(x) = Q(\lambda_1)\frac{P(x)}{P'(\lambda_1)(x-\lambda_1)} + \dots + Q(\lambda_n)\frac{P(x)}{P'(\lambda_n)(x-\lambda_n)}.$$

Для нас особенно важно уметь вычислять главные части рациональных функций Q/P с фиксированным знаменателем P для различных числителей Q. Покажем, что *для вычисления главных частей различных рациональных функций с одним и тем же знаменателем P достаточно вычислить главные части рациональной функции P^{-1}.*

Действительно, пусть

$$[P^{-1}]_{\lambda_i}(x) = \sum_{1\le j\le n_i} \frac{c_{i,j}}{(x-\lambda_i)^j} = \frac{c_{i,1}(x-\lambda_i)^{n_i-1} + \dots + c_{i,n_i}}{(x-\lambda_i)^{n_i}}.$$

Вычисление функции $[P^{-1}]_{\lambda_i}$ эквивалентно вычислению полинома L_i, где $L_i(x) = c_{i,n_i} + \dots + c_{i,1}(x-\lambda_i)^{n_i-1} = [P^{-1}]_{\lambda_i}(x)(x-\lambda_i)^{n_i}$ — полиномом Тейлора порядка $n_i - 1$ функции $(x-\lambda_i)^{n_i}P^{-1}$ в точке λ_i. *Для нахождения главной части $[R]_{\lambda_i}$ функции $R = Q/P$ достаточно, отбрасывая члены порядка $\ge n_i$, умножить полином Тейлора $Q_{[\lambda_i, n_i-1]}$ порядка $n_i - 1$ функции Q в точке λ_i на полином L_i и полученный полином порядка $n_i - 1$ поделить на $(x-\lambda_i)^{n_i}$.*

По определению, мы знаем полиномы Тейлора базисных интерполятсионных полиномов порядков $n_i - 1$ в узлах λ_i. Поэтому мы можем вычислить базисные интерполяционные полиномы, зная главные части $[P^{-1}]_{\lambda_i}$ функции P^{-1}. Начнем с базисного полинома $P_{(\lambda_i,0)}$ типа $(i, 0)$.

Следствие 3.7. *Базисный интерполяционный полином $P_{(\lambda_i,0)}$ удовлетворяет соотношению $P_{(\lambda_i,0)} = L_i(x)P(x)(x-\lambda_i)^{-n_i}$.*

Теперь напишем формулу для базисного полинома $P_{\lambda_i,q}$ типа $(i,q) \in J$.

Следствие 3.8. *Для каждого $0 \le q < n_i$ справедливо равенство $P_{\lambda_i,q}(x) = (c_{i,q+1}(x-\lambda_i)^{n_i-1} + \dots + c_{i,n_i}(x-\lambda_i)^q)P(x)(x-\lambda_i)^{-n_i}$.*

Эта формула особенно проста для базисных полиномов типа $(i, n_1 - 1)$. Пусть $\tilde{P}_i = P(x)(x-\lambda_i)^{-n_i}$.

Следствие 3.9. *Для базисного интерполяционного полинома P_{λ_i,n_i-1} справедливо равенство $P_{\lambda_i,n_i-1}(x) = \tilde{P}_i^{-1}(\lambda_i)P(x)(x-\lambda_i)^{-1}$.*

В случае некратных узлов интерполирования, следствие 3.9 снова дает известные формулы для базисных интерполяционных полиномов с простыми узлами интерполирования. Следствие 3.9 не тольно просто формулируется — его просто непосредственно проверить.

3.7. Индукционное построение интерполяционных полиномов. В этом пункте приводится еще одна процедура построения интерполяционных полиномов Лагранжа с кратными узлами интерполирования.

Для одного узла $\lambda_1 \in K$ кратности n_1 интерполяционная задача очень проста. В этом случае интерполяционный полином L функции Q является ее полиномом Тейлора порядка $n_1 - 1$ в точке λ_1:

$$L(x) = Q_{[\lambda_1,n_1-1]}(x) = Q(\lambda_1) + Q'(\lambda_1)(x-\lambda_1) + \cdots + \frac{Q^{(n_1-1)}(\lambda_1)(x-\lambda_1)^{n_1-1}}{(n_1-1)!}.$$

Для каждого $0 \le q < n_1$ базисный интерполяционный полином $P_{\lambda_1,q}$ в этой задаче равен $(x-\lambda_i)^q$.

Пусть задано k узлов интерполирования $\lambda_1,\ldots,\lambda_k \in K$. Допустим, что мы уже умеем строить интерполяционный полином Лагранжа с $k-1$ узлом интерполирования $\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ кратностей $n_2,\ldots,n_k$ для любой рациональной функции Q, не имеющей полюсов в узлах интерполирования. Решим аналогичную задачу для заданного набора из k узлов интерполирования.

Пусть рациональная функция Q не имеет полюсов в точках $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$, и пусть $Q_{[\lambda_1,n_1-1]}$ — полином Тейлора порядка n_1-1 функции Q в точке λ_1. Обозначим через R рациональную функцию

$$R(x) = \frac{Q(x) - Q_{[\lambda_1,n_1-1]}(x)}{(x-\lambda_1)^{n_1}}.$$

Пусть L_1 — интерполяционный полином Лагранжа рациональной функции R с узлами интерполирования $\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ кратностей $n_2,\ldots,n_k$. По определению, степень полинома L_1 меньше, чем $n_2+\cdots+n_k = n-n_1$.

Утверждение 3.10. *Интепроляционный полином L функции Q с узлами $\lambda_1,\ldots\lambda_k$ кратностей $n_1,\ldots,n_k$ удовлетворяет равенству*

$$L(x) \equiv Q_{[\lambda_1,n_1-1]}(x) + L_1(x)(x-\lambda_1)^{n_1}.$$

Доказательство. По определению полинома Лагранжа, функции R и L_1 имеют в узлах $\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ одинаковые струи порядков $n_2-1,\ldots,n_k-1$. Поэтому функции $Q(x) - Q_{[\lambda_1,n_1-1]}(x)$ и $L_1(x)(x-\lambda_1)^{n_1}$ тоже имеют в этих узлах одинаковые струи тех же порядков. Следовательно, полиномы $Q(x)$ и $L(x) = Q_{[\lambda_1,n_1-1]}(x) + L_1(x)(x-\lambda_1)^{n_1}$ имеют в узлах $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ одинаковые струи порядков $n_1-1,\ldots,n_k-1$. Для завершения доказательства осталось заметить, что степень полинома L меньше чем n.

Рассмотрим, например, интерполяционную задачу с узлами интерполирования $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$, в которой узел λ_1 имеет кратность n_1, а все остальные узлы однократны. Так как корни $\lambda_2, \dots, \lambda_k$ однократны, то соответствующие этим узлам базисные интерполяционные полиномы $P_{(\lambda_i,0)}$ легко вычислить (см. следствие 3.9). Именно, при $2 \le i \le k$

$$P_{(\lambda_i,0)} = \frac{P(x)}{P'(\lambda_i)(x-\lambda_i)},$$

где $P(x) = (x-\lambda_1)^{n_1} M(x)$ и $M(x) = \prod\limits_{2\le i\le k}(x-\lambda_i)$.

Интерполяционную задачу с некратными корнями $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ мы умеем решать явно. Именно, для всякой функции Q ее интерполяционный полином для этой задачи равен $M(x)\sum\limits_{2\le i\le k} Q(\lambda_i)/M'(\lambda_i)(x-\lambda_i)$.

Применяя проделанные вычисления, получим при $0 \le j < n_1$ следующие выражения для базисных интерполяционных полиномов $P_{(\lambda_1,j)}$:

$$P_{(\lambda_1,j)}(x) = (x-\lambda_1)^j - P(x)\sum_{2\le i\le k}\frac{(\lambda_i-\lambda_1)^{j-n_1}}{M'(\lambda_i)(x-\lambda_i)}.$$

3.8. Обобщенные матрицы Вандермонда и интерполяционные полиномы. Назовем *матрицей Вандермонда n-го порядка*, матрицу M размера $n \times n$, зависящую от параметров $u_1, \dots, u_n$, i-й столбец которой — n-вектор $(1, u_i, \dots, u_i^{n-1})$. Определитель W этой матрицы называется определителем Вандармонда. Этот определитель, равный, как известно, $\prod\limits_{1\le i<j\le n}(u_j - u_i)$, мы будем рассматривать как полином от переменных $u_1, \dots, u_n$. Определитель Вандермонда обращается в нуль, если и только если некоторые из переменных $u_1, \dots, u_n$ принимают равные значения.

Для наших целей удобно столбцам матрицы Вандермонда приписать пару индексов. Обозначим, как мы это делали выше, через J множество из n элементов, состоящее из пар (i,j), где $0 \le i \le k$, $0 \le j < n_i$ и $n_1 + \dots + n_k = n$. В множестве J мы вводим лексекографический порядок. В соответствии с этим упорядочиванием, каждая пара (i,j) приобретает некоторый номер $m(i,j)$. Теперь m-му столбцу матрицы Вандермонда припишем пару индексов (i,j), где $m = m(i,j)$.

Назовем *матрицей Вандермонда типа J* матрицу M_J размера $n \times n$, зависящую от параметров $v_1, \dots, v_k$, m-й столбец которой, где $m = m(i,j)$, равен $(j-1)$-й производной по параметру v_i вектора $(1, v_i, \dots, v_i^{n-1})$. Определитель матрицы M_J будем обозначать W_J и называть *определителем Вандермонда типа J*.

Пример. Пусть $n = 3$ и множество J соответствует разбиению $n_1 + n_2 = n$, где $n_1 = 2$, $n_2 = 1$. Таким образом, упорядочненное множество J состоит из пар $(1,0), (1,1), (2,1)$, расположенных в порядке возрастания. В этом примере матрица Вандермонда типа J есть матрица

$$M_J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ v_1 & 1 & v_2 \\ v_1^2 & 2v_1 & v_2^2 \end{pmatrix},$$

а определитель Вандермонда типа J есть полином $W_J = (v_1 - v_2)^2$.

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$D_J = \prod_{0\le i\le k, 0\le j<n_i} \frac{\partial^j}{\partial u_i^j}.$$

Из определений матрицы Вандермонда M и матрицы Вандермонда типа M_J вытекает следуюшая лемма.

Лемма 3.11. *Матрица $M_J(v_1,\dots v_k)$ получается из матрицы $D_J M(u_1,\dots u_k)$ подстановкой $u_m = v_l$ для всех индексов m, удовлетворяющих соотношению $k(l,0)\le m\le k(l,n_l-1)$. Определитель Вандермонда типа J получается из определителя Вандермонда $W(u_1,\dots u_k)$ применением тех же операций.*

Вычислим определитель Вандермонда типа J.

Лемма 3.12. *Для определителя Вандермонда типа J справедлива формула*

$$W_J(v_1,\dots,v_k) = C_J \prod_{1\le p<q\le k} (v_q - v_p)^{n_p n_q},$$

где $C_J = \prod_{1\le i\le k, 0\le j<n_i} j!$.

Доказательство. Индукция по числу кратностей n_j, отличных от единицы. Если все кратности равны единице, то лемма сводится к формуле для определителя Вандермонда. Пусть она доказана для определителя W_J типа J, связанного с набором неединичных кратностей $n_1,\dots,n_m$, где $n_1+\dots+n_m = l$. Докажем ее для определителя W_{J_1} типа J_1, связанного с набором неединичных кратностей $n_1,\dots,n_m+1$. Согласно индукционному предположению, для определителя W_J, рассматриваемого как полином от переменных $v_1,\dots,v_k$, где $k = n-l+m$, справедлива формула

$$W_J = C_J \prod_{1\le p<q\le m} (v_q - v_p)^{n_p n_q} \prod_{1\le p\le m<q\le k} (v_q - v_p)^{n_p} \prod_{m<p<q\le k} (v_q - v_p).$$

Согласно лемме 3.11, определитель W_{J_1}, рассматриваемый как полином от переменных $y_1,\dots,\dots,y_{k-1}$, получается из определителя W_J применением оператора $\frac{\partial^{n_m+1}}{\partial v_m^{n_m+1}}$ и подстановкой $y_i = v_i$ при $1\le i<m$ и $y_i = v_{i-1}$ при $m\le i<k$. Из индукционной формулы видно, что полином W_J делится на полином $V = (v_m - v_{m-1})^{n_m+1}$. Поэтому W_{J_1} получается из W_J делением на полином V, умножением на $(n_m+1)!$ и затем выполнением указанной выше подстановки. Что позволяет сделать шаг индукции.

Перейдем к формулам для базисных интерполяционных полиномов. Рассмотрим интерполяционную задачу типа J с корнями интерполирования $\lambda_1,\dots,\lambda_k$. Нам будет удобно ввести матрицу $M_{J,(i,j)}$, где $(i,j)\in J$. По определению, эта матрица получается из матрицы M_J, зависящей от параметров $v_1,\dots,v_k$, заменой столбца, имеющего номер $m = m(i,j)$, на столбец $(1,x,\dots,x^{n-1})$. Обозначим через $W_{J,(i,j)}$ определитель матрицы $M_{J,(i,j)}$, рассматриваемый как полином от переменной x и параметров $v_1,\dots,v_k$.

Теорема 3.13. *Базисный полином $P_{(\lambda_i,j)}(x)$ получается из рациональной функции $W_{J,(i,j)}(v_1,\dots v_k,x)/W_J(v_1,\dots v_k,)$ подстановкой $v_1=\lambda_1,\dots,v_k=\lambda_k$, т.е.*

$$P_{(\lambda_i,j)}(x)=\frac{W_{J,(i,j)}}{W_J}(\lambda_1,\dots\lambda_k,x).$$

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно решить систему уравнений (12), используя правило Крамера.

3.9. Примеры. Узлы суммарной кратности два. В этом и в следующем пунктах мы приводим формулы для решения интерполяционных задач с суммарной кратностью узлов, не превосходящей трех. Все эти задачи очень просты: за исключением задачи с одним двухкратным и одним однократным узлами, это либо задача с некратными узлами, либо задача с одним кратным узлом, которую решают полиномы Тейлора. Мы останавливаемся на этих примерах по следующим причинам. Во-первых, часто встречаются именно задачи с двумя или тремя узлами. Во-вторых, в качестве ответа нужно иметь интерполяционый полином, записанный в виде суммы мономов от независимой переменной (а обычные формулы дают ответы в других видах и нужен пересчет). В третьих, на приводимых примерах мы демонстрируем применение обобщенных матриц Вандермонда.

Пусть $P(x)=x^2+px+q$ — многочлен второй степени над полем K, раскладывающийся над полем K на линейные множители, $P(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$. Возникают два случая: $\lambda_1\neq\lambda_2$ и $\lambda_1=\lambda_2$. Рассмотрим интерполяционные задачи, связанные с этими двумя случаями.

Случай $\lambda_1\neq\lambda_2$. Для задачи с двумя различными узлами λ_1 и λ_2 определитель Вандермонда равен $\lambda_2-\lambda_1$. Базисные интерполяционные полиномы задаются формулами:

$$P_{(\lambda_1,0)}(x)=\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\det\begin{vmatrix}1&1\\x&\lambda_2\end{vmatrix}=\frac{-x+\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1};$$

$$P_{(\lambda_2,0)}(x)=\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\det\begin{vmatrix}1&1\\\lambda_1&x\end{vmatrix}=\frac{x-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}.$$

Для всякой функции $Q(x)$ (для которой определены значения $Q(\lambda_1)$ и $Q(\lambda_2)$) интерполяционный полином Лагранжа с узлами λ_1 и λ_2 равен

$$\frac{Q(\lambda_1)(-x+\lambda_2)}{\lambda_2-\lambda_1}+\frac{Q(\lambda_2)(x-\lambda_1)}{\lambda_2-\lambda_1}=\frac{Q(\lambda_2)-Q(\lambda_1)}{\lambda_2-\lambda_1}x+\frac{Q(\lambda_1)\lambda_2-Q(\lambda_2)\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}.$$

Случай $\lambda_1=\lambda_2$. Для интерполяционой задачи с одним узлом интерполирования λ_1, имеющим кратность два, базисные полиномы задаются формулами:

$$P_{\lambda_1,0}(x)\equiv 1;\qquad P_{\lambda_1,1}(x)=x-\lambda_1.$$

Для всякой функции $Q(x)$ (для которой определены $Q(\lambda_1)$ и $Q'(\lambda_1)$) интерполяционный полином с узлам λ_1 кратности два равен ее полиному Тейлора $Q_{[\lambda_1,1]}$ и задается формулой:

$$Q_{[\lambda_1,1]}(x) = Q(\lambda_1) + Q'(\lambda_1)(x-\lambda_1) = Q'(\lambda_1)x + [Q(\lambda_1) - Q'(\lambda_1)\lambda_1].$$

3.10. Примеры. Узлы суммарной кратности три. Пусть $P(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ — полином третьей степени над полем K, раскладывающийся над полем K на линейные множители, $P(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_1)$. Возникают три случая: 1) все корни различны, 2) один из корней имеет кратность два, 3) все три корня совпадают. Рассмотрим интерполяционные задачи, связанные с этими тремя случаями.

Случай различных корней. Для задачи с тремя различными узлами λ_1, λ_2 и λ_3 определитель Вандермонда W равен $(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_1)$. Базисные интерполяционные полиномы задаются следующими формулами:

$$P_{(\lambda_1,0)} = \frac{1}{W}\det\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & \lambda_2 & \lambda_3 \\ x^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} = \frac{x^2 - (\lambda_2+\lambda_3)x + \lambda_2\lambda_3}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)},$$

$$P_{(\lambda_2,0)} = \frac{1}{W}\det\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & x & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & x^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} = \frac{x^2 - (\lambda_3+\lambda_1)x + \lambda_3\lambda_1}{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_1)},$$

$$P_{(\lambda_3,0)} = \frac{1}{W}\det\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & x \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & x^2 \end{vmatrix} = \frac{x^2 - (\lambda_2+\lambda_3)x + \lambda_2\lambda_3}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}.$$

Для всякой функции Q (для которой определены $Q(\lambda_1), Q(\lambda_2)$ и $Q(\lambda_3)$) интерполяционный полином с узлами λ_1, λ_2 и λ_3 равен

$$Q(\lambda_1)P_{(\lambda_1,0)}(x) + Q(\lambda_2)P_{(\lambda_2,0)}(x) + Q(\lambda_3)P_{(\lambda_3,0)}(x) = A_1x^2 + B_1x + C_1, \text{ где}$$

$$A_1 = \frac{Q(\lambda_1)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)} + \frac{Q(\lambda_2)}{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_1)} + \frac{Q(\lambda_3)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)},$$

$$B_1 = -\frac{Q(\lambda_1)(\lambda_2+\lambda_3)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)} + \frac{Q(\lambda_2)(\lambda_3+\lambda_1)}{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_1)} + \frac{Q(\lambda_3)(\lambda_1+\lambda_2)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)},$$

$$C_1 = \frac{Q(\lambda_1)\lambda_2\lambda_3}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)} + \frac{Q(\lambda_2)\lambda_3\lambda_1}{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_1)} + \frac{Q(\lambda_3)\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}.$$

Случай одного корня кратности два. Рассмотрим задачу интерполирования с двукратным узмом λ_1 и однократным узлом λ_2. Матрица Вандермонда для этого случая приведена в примере из п. 3.8. Для этого примера $W_J = (\lambda_1-\lambda_2)^2$.

$$P_{(\lambda_1,0)}(x) = \frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}\det\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & 1 & \lambda_2 \\ x^2 & 2\lambda_1 & \lambda_2^2 \end{vmatrix} = \frac{-x^2 + 2\lambda_1x + (\lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2)}{(\lambda_1-\lambda_2)^2},$$

$$P_{(\lambda_1,1)}(x)=\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}\det\begin{vmatrix}1&1&1\\ \lambda_1&x&\lambda_2\\ \lambda_1^2&x^2&\lambda_2^2\end{vmatrix}=\frac{x^2-(\lambda_1+\lambda_2)x+\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1-\lambda_2)},$$

$$P_{(\lambda_2,0)}(x)=\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}\det\begin{pmatrix}1&0&1\\ \lambda_1&1&x\\ \lambda_1^2&2\lambda_1&x^2\end{pmatrix}=\frac{x^2-2\lambda_1x+\lambda_1^2}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}.$$

Для всякой функции Q (для которой определены $Q(\lambda_1), Q'(\lambda_1)$ и $Q(\lambda_2)$) интерполяционный полином с двукратным узлом λ_1 и однократным узлом λ_2 равен $Q(\lambda_1)P_{(\lambda_1,0)}+Q'(\lambda_1,1)P_{(\lambda_1,1)}+Q(\lambda_2)P_{(\lambda_2,0)}=A_2x^2+B_2x+C_2$, где

$$A_2=\frac{-Q(\lambda_1)+Q(\lambda_2)}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}+\frac{Q'(\lambda_1)}{\lambda_1-\lambda_2},$$

$$B_2=\frac{2Q(\lambda_1)\lambda_1-2Q(\lambda_2)\lambda_1}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}-\frac{Q'(\lambda_1)(\lambda_1+\lambda_2)}{\lambda_1-\lambda_2},$$

$$C_2=\frac{Q(\lambda_1)\lambda_2(\lambda_2-2\lambda_1)+Q(\lambda_2)\lambda_1^2}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}+\frac{Q'(\lambda_1)\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1-\lambda_2)}.$$

Случай одного корня кратности три. Для интерполяционной задачи с одним узлом кратности три, $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$, базисные полиномы задаются формулами:

$$P_{(\lambda_1,0)}(x)=1;\ P_{(\lambda_1,1)}(x)=x-\lambda_1;\ P_{(\lambda_1,2)}(x)=(x-\lambda_1)^2=x^2-2\lambda_1+\lambda_1^2.$$

Для всякой функции Q (для которой определены $Q(\lambda_1), Q'(\lambda_1)$ и $Q''(\lambda_1)$) ее интерполяционный полином с трехкратным узлом λ_1 равен ее полиному Тейлора $Q_{[\lambda_1,2]}$ и задается формулой:

$$Q_{[\lambda_1,2]}(x)=Q(\lambda_1)+Q'(\lambda_1)(x-\lambda_1)+\frac{1}{2}Q''(\lambda_1)(x-\lambda_1)^2=$$
$$=\frac{Q''(\lambda_1)}{2}x^2+[Q'(\lambda_1)-Q''(\lambda_1)\lambda_1]x+\left(Q(\lambda_1)-Q'(\lambda_1)\lambda_1+\frac{Q''(\lambda_1)\lambda_1^2}{2}\right).$$

4. Функции от элемента алгебры, удовлетворяющего алгебраическому уравнению

В этом параграфе вычисляются функции от элемента алгебры, удовлетворяющего алгебраическому уравнению. Вычисления основаны на интерполяционных полиномах с кратными узлами интерполирования.

4.1. Полиномы от элемента алгебры, удовлетворяющего алгебраическому уравнению. Мы будем пользоваться обозначениями из п.1.3. Пусть A — элемент алгебры V с единицей над полем K, удовлетворяющий уравнению (9). Откажемся от предположения, что все корни полинома P различны, но, по-прежнему, будем считать, что все они содержатся в поле K, т.е. будем считать, что $P(x)=\prod_{i=1}^{k}(x-\lambda_i)^{n_i}$, где $\lambda_i\in K$. Для всякого полинома Q с коэффитциентами в поле K вычислим элемент $Q(A)$ алгебры V, зная, что A удовлетворяет уравнению (9).

Утверждение 4.1. *Для всякого полинома Q справедливо равенство $Q(A) = Q_1(A)$, где Q_1 — остаток от деления полинома Q на полином P.*

Доказательство. Поделим с остатком полином Q на полином P. Получим представление полинома Q в виде $Q = Q_1 + MP$, где M — некоторый полином. Имеем $Q(A) = Q_1(A)+M(A)P(A)$. По условию $P(A) = 0$, поэтому $Q(A) = Q_1(A)$.

Следствие 4.2. *Для всякого полинома Q справедливо равенство $Q(A) = Q_1(A)$, где Q_1 — интерполяционный полином функции Q с узлами интерполирования $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ кратностей $n_1, \dots, n_k$.*

Доказательство. Следствие вытекает из утверждения 4.1 и из обобщенной теоремы Безу (см. п. 3.5).

Теорема 4.3. *Для всякого полинома Q и элемента A, удовлетворяющего уравнению (2), справедливо равенство*

$$Q(A) = \sum_{(i,j)\in J} \frac{Q^{(j)}(\lambda_i)}{j!} P_{(\lambda_i,j)}(A),$$

где $P_{(\lambda_i,j)}$ — базисные полиномы для инперполяционной задачи с узлами $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ кратностей $n_1, \dots, n_k$

Доказательство. Теорема вытекает из следствия и из формулы для интерполяционного полинома (см. утверждение 3.2).

Модифицируем теорему 4.3. Для всякого полинома Q и всякого вектора $u \in \mathcal{L}$ вычислим вектор $\pi(Q(A)u) \in M$.

Теорема 4.3$'$. *Для оператора A, удовлетворяющего уравнению (9), для полинома $Q \in K[x]$ и вектора $u \in \mathcal{L}$ справедливо равенство*

$$\pi(Q(A)u) = \sum_{(i,j)\in J} \frac{Q^j(\lambda_i)}{j!} \pi(P_{(\lambda_i,j)}(u)) =$$

$$= \sum_{(i,j)\in J} \frac{Q^j(\lambda_i)}{j!} P_{(\lambda_i,j)} \langle \pi(u), \pi(Au), \dots, \pi(A^{n-1}u) \rangle.$$

Теорема 4.3$'$ доказывается точно также, как теорема 4.3.

4.2. Аналитические функции от элемента алгебры, удовлетворяющего алгебраическому уравнению . Вернемся к ситуации пункта 1.4 и откажемся от дополнительного предположения о том, что все корни полинома P просты. Мы будем использовать обозначения пункта 1.4.

Пусть элемент $A \in V$ удовлетворяет алгебраическому уравнению (9) над полем комплексных чисел $K = \mathbb{C}$. Пусть полином P степени n, фигурирующий в этом уравнении, имеет корни $\lambda_1 \dots, \lambda_k$ кратностей $n_1 \dots, n_k$.

Теорема 4.4. *Пусть F — аналитическая функция, заданная рядом $F = \sum\limits_{0\leq i} c_i z^i$, радиус сходимости r которого удовлетворяет неравенству $|\lambda_i| < r$ для всех корней λ_i полинома P. Тогда определено значение $F(A)$ аналитической функции F на элементе A, причем*

$$F(A) = \sum_{(i,j)\in J} \frac{F^j(\lambda_i)}{j!} P_{(\lambda_i,j)}(A),$$

где $P_{\lambda_i,j}$ — базисные полиномы для интерполяционной задачи с узлами $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ кратностей $n_1,\dots,n_k$.

Пусть V — алгебра линейных операторов на векторном пространстве $\mathcal{L}$ над полем $\mathbb{C}$, и M — векторное пространство над $\mathbb{C}$, наделенное некоторой разумной топологией. Пусть фиксировано линейное отображение $\pi : \mathcal{L} \to M$.

Пусть оператор $A \in V$ удовлетворяет алгебраическому уравнению (9) над полем комплексных чисел $K = \mathbb{C}$. Пусть полином P степени n, фигурирующий в этом уравнении, имеет корни $\lambda_1 \dots, \lambda_k$ кратностей $n_1 \dots, n_k$.

Теорема 4.4$'$. *Пусть F — аналитическая функция, заданная рядом $F = \sum\limits_{0\leq i} c_i z^i$, радиус сходимости r которого удовлетворяет неравенству $|\lambda_i| < r$ для всех корней λ_i полинома P. Тогда для каждого вектора $u \in M$ определено значение $\pi(F(A)u)$, причем*

$$\pi(F(A)u) = \sum_{(i,j)\in J} F(\lambda_i) P_{(\lambda_i,j)} \langle \pi u, \pi(Au), \dots, \pi(A^{n-1}u)\rangle,$$

где $P_{\lambda_i,j}$ — базисные полиномы для интерполяционной задачи с узлами $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ кратностей $n_1,\dots,n_k$.

Теоремы 4.4 и 4.4$'$ доказываются точно также как теорема 1.5 и теорема 1.5$'$ из п. 2.4.

4.3. Рациональные и мероморфные функции от элемента алгебры, удовлетворяющего алгебраическому уравнению. Пусть $P \in K[x]$ — полином степени n с корнями $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ кратностей $n_1,\dots,n_k$. Пусть Λ — множество корней полинома P и J — множество пар (i,j), где $1 \leq i \leq k$ и $0 \leq j < n_i$.

Справедлива следующая теорема.

Обращение полинома. *Если полином Q взаимно прост с полиномом P, то полином $\bar{Q}$, решающий для полиномов Q и P задачу (2) из пункта 0.3, равен интерполяционному полиному Лагранжа функции Q^{-1} с узлами интерполирования $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ кратностей $n_1,\dots,n_k$.*

Доказательство. Пусть полином $\bar{Q}$ является решением задачи (2) (согласно утверждению 0.3, в условиях теоремы задача (2) разрешима). Тогда найдется полином P_1 такой, что $Q(x)\bar{Q}(x) - 1 = P(x)P_1(x)$. В точке $x = \lambda_i$ полином Тейлора $P_{[\lambda_i, n_i-1]}$ порядка $n_i - 1$ функции P равен нулю, поскольку полином P имеет корень порядка n_i в точке λ_i. Приравнивая струи порядка $n_i - 1$ в точке $x = \lambda_i$ функций $Q(x)\bar{Q}(x) - 1$ и $P(x)P_1(x)$, получим тождество $Q_{[\lambda_i,n_i-1]}\bar{Q}_{[\lambda_i,n_i-1]} - 1 = 0$. Эти тождества означают, что функции Q^{-1} и $\bar{Q}$ имеют одинаковые струи порядков $n_i - 1$ в точках λ_i. Так как степень полинома $\bar{Q}$ меньше n, он является интерполяционным полиномом функции Q^{-1} с узлами интерполирования $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ кратностей $n_1, \dots, n_k$

Пусть элемент $A \in V$ удовлетворяет уравнению $P(A) = 0$.

Следствие 4.5. *Пусть полином P имеет корни $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ кратностей $n_1, \dots, n_k$, полином Q взаимно прост с полиномом P и элемент A алгебры V удовлетворяет уравнению $P(A) = 0$. Тогда элемент $Q(A) \in V$ обратим и*

$$Q^{-1}(A) = \sum_{(i,j)\in J} \frac{[Q^{-1}]^{(j)}(\lambda_i)}{j!} P_{(\lambda_i,j)}(A).$$

Доказательство. Действительно, в силу сравнения $Q\bar{Q} - 1 \equiv 0 \mod P$, элемент $\bar{Q}(A)$ обратен к элементы $Q(A)$. Полином $\bar{Q}$ — это интерполяционный полином функции Q^{-1} с узлами $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ кратностей $n_1, \dots, n_k$, что и доказывает следствие.

Теорема 4.6. *Пусть полином P имеет корни $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ кратностей $n_1, \dots, n_k$, полином Q взаимно прост с полиномом P и элемент $A \in V$ алгебры V удовлетворяет уравнению $P(A) = 0$. Тогда определено значение рациональной функции $R = T/Q$ на элементе A и справедлива формула:*

$$R(A) = \sum_{(i,j)\in J} \frac{R^{(j)}(\lambda_i)}{j!} P_{(\lambda_i,j)}(A).$$

Доказательство. Пусть $L(x) = \sum\limits_{(i,j)\in J} (R^{(j)}(\lambda_i)/j!) P_{(\lambda_i,j)}(x)$ — интерполяционный полином функции $R = T/Q$. Рациональная фунция $R - L$ представима в виде PH/Q, где H — некоторый полином. Действительно, $R - L = (T - LQ)/Q$. Разность $T - LQ$ в узлах λ_i имеет нули порядка $\geq n_i - 1$, т.е. полином $T - LQ$ делится на полином P. Знаменатель Q рациональных функций R и PH/Q взаимно прост с P. Поэтому определены элементы $R(A) - L(A)$ и $(PH/Q)(A)$ и эти элементы равны между собой. Однако, $P(A)(H/Q)(A) = 0$, следовательно, $R(A) = L(A)$. Откуда и вытекает теорема.

Пусть элемент $A \in V$ удовлетворяет алгебраическому уравнению (9) над полем комплексных чисел $K = \mathbb{C}$.

Теорема 4.7. *Пусть полином P имеет корни $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ кратностей $n_1, \dots, n_k$. Пусть F и G — функции комплексного переменного, заданные в некотором круге $|z| < r$ как суммы сходящихся рядов по степеням переменной z. Пусть для всех корней λ_i полинома P выполняются неравенства $|\lambda_i| < r$ и $G(\lambda_i) \neq 0$. Тогда определено значение $\Phi(A)$ мероморфной функции $\Phi = F/G$ на элементе A, причем*

$$\Phi(A) = \sum_{(i,j)\in J} \frac{\Phi^{(j)}}{j!}(\lambda_i) P_{(\lambda_i,j)}(A).$$

Доказательство. Согласно теореме 1.5, определены значения $F(A)$ и $G(A)$ аналитических фукций F и G на элементе A. Из теоремы 1.5 видно, что $F(A) = F_1(A)$ и $G(A) = G_1(A)$, где F_1 и G_1 — интерполяционные полиномы функций F и G с узлами интерполирования $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ кратностей $n_1, \dots n_k$. Рациональная фунция F_1/G_1 имеет в точках λ_i те же струи порядков $n_i - 1$, что и функция $\Phi = F/G$. Теперь теорема 4.7 сводится к предыдущей теореме для рациональной фунции $R = F_1/G_1$.

Следствие 4.8. Пусть $\lambda \in K$ — элемент поля K такой, что $P(\lambda) \neq 0$. Тогда
$$(A - \lambda I)^{-1} = \sum_{(i,j)\in J} \frac{P_{(\lambda_i,j)}(A)}{(\lambda_i - \lambda)^j}.$$

Доказательство. Следствие получается применением теоремы к рациональной функции $R(x) = 1/(x - \lambda)$.

4.4. Алгебра функций на конечном множестве кратных точек . *Струи порядка k в точке $\lambda \in K$ поля K образуют алгебру*: их можно складывать, умножать на элементы поля K и умножать друг на друга. Чтобы перемножить две k струи, нужно перемножить их полиномы Тейлора (рассматриваемые как функции переменной $x - \lambda$) и у произведения отбросить член, порядка $> (x - \lambda)^{k+1}$.

Пусть Λ — конечное множество точек $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ поля K, рассматриваемых с кратностями $n_1, \dots, n_k$. Пусть J — множество пар индексов (i, j), где $1 \le i \le k$, $0 \le j < n_i$, снабженное лексиграфическим порядком.

Определение. *Алгеброй K_{Λ_J} функций на "множестве кратных точек Λ_J",* называется алгебра, состоящая из функций, сопоставляющих каждой точке $\lambda_i \in \Lambda$ некоторую струю порядка $n_i - 1$ в этой точке. Операции сложения, умножения на элементы поля K и умножения на элементы алгебры Λ_J, осуществляются поточечно.

Обозначим через P полином $\prod\limits_{1 \le i \le k} (x - \lambda_i)^{n_i}$.

Рассмотрим гомоморфизм $\pi : K[x] \to K_{\Lambda_J}$ кольца полиномов над полем K в алгебру K_{Λ_J}, сопоставляющий каждому полиному набор его струй порядка $n_i - 1$ в точках $\lambda_i \in \Lambda$. Обозначим через $K_{n-1}[x] \subset K[x]$ подпространство в $K[x]$, состоящее из полиномов степени $< n$

Утверждение 4.9. *Ограничение $\pi : K_{n-1}[x] \to K_{\Lambda_J}$ гомоморфизма π на $K_{n-1}[x]$ является изоморфизмом линейных пространств. Полином M переходит в нуль при гомоморфизме π, если и только если M делится на P. Т.е. гомоморфизм π задает изоморфизм фартор-кольца $K[x]/(P)$ кольца полиномов по идеалу (P), состоящему из полиномов, делящихся на P, и алгебры K_{Λ_J}.*

Доказательство. Для заданного набора струй порядков $n_i - 1$ в точках $\lambda_i \in \Lambda$ существует интерполяционный полином Лагранжа с узлами $\lambda_i \in \Lambda$ кратности n_i, имеющий в точках множества Λ заданные струи. Ограничение $\pi : K_{n-1}[x] \to K_{\Lambda_J}$ гомоморфизма π на $K_{n-1}[x]$ является изоморфизмом линейных пространств. Остальные пункты утверждения 4.9 очевидны.

В алгебре K_{Λ_J} есть естественный базис. Он состоит из наборов струй $\delta_{(\lambda_i,j)}$, равных в точке λ_i струе $(x-\lambda_i)^j$ и обращающихся в нуль в остальных точках множества Λ. По определению, базисный интерполятсионный полином $P_{(\lambda_i,j)}$ при гоморфизме π переходит в элемент $\delta_{(\lambda_i,j)} \in K_{\Lambda_J}$.

Удобно принять следующее соглашение: *для пары (i,j), где $1 \le i \le k$ и $n_i \le j$, символ $\delta_{(\lambda_i,j)}$ означает нулевой элемент алгебры K_{Λ_J} и символ $P_{(\lambda_1,j)}$ означает полином, тождественно равный нулю.*

Утверждение 4.10. *1. Для базисных интерполяционных полиномов $P_{\lambda_i,j}$ справедливы следующие сравнения:*

1) $P_{(\lambda_1,0)} + \cdots + P_{(\lambda_k,0)} \equiv 1 \mod P$,

2) $P_{(\lambda_i,j_1)} P_{(\lambda_m,j_2)} \equiv 0 \mod P$ при $i \ne m$,

3) $P_{(\lambda_i,j)} P_{(\lambda_i,m)} \equiv P_{(\lambda_i,j+m)} \mod P$,

4) $(x-\lambda_i) P_{(\lambda_i,j)} \equiv P_{(\lambda_i,j+1)} \mod P$.

Доказательство. В алгебре K_{Λ_J}, очевидно, выполнены следующие равенства: 1) $\delta_{\lambda_1} + \cdots + \delta_{\lambda_n} = 1$, где 1 — единичный элемент алгебры K_{Λ_J}, сопостовяющий каждой точке $\lambda_i \in \Lambda$ струю функции, тождественно равной 1; 2) при $i \ne j$ $\delta_{\lambda_i}\delta_{\lambda_j} = 0$, где 0 — нулевой элемент алгебры K_{Λ_J}, сопостовяющий каждой точке $\lambda_i \in \Lambda$ струю функции, тождественно равной нулю; 3) $\delta_{(\lambda_i,j)}\delta_{(\lambda_i,m)} = \delta_{(\lambda_i,j+m)}$, 4) $\pi(x-\lambda_i)\delta_{(\lambda_i,j)} = \delta_{(\lambda_i,j+1)}$, где $\pi(x-\lambda_i)$ — образ в K_{Λ_J} полинома $x-\lambda_i$ при гоморфизме π. Теперь утверждение 4.10 вытекает из утверждения 4.9.

5. Операторы, реккурентные и дифференциальные уравнения

Приведем некоторые применения вычислений функций от элемента $A \in V$ из параграфа 4.

5.1. Оператор, удовлетворяющий полиномиальному уравнению. Рассмотрим векторное пространство $\mathcal{L}$ (возможно, бесконечномерное) над полем K и линейный оператор $A : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$. Пусть оператор A удовлетворяет полиномиальмому уравнению (9), имеющему вид $P(A) = 0$, где P — полином $\prod\limits_{1 \le i \le k} (x-\lambda_i)^{n_i}$ с множеством корней $\Lambda \subset K$ и J — множество пар (i,j), где $1 \le i \le k, 0 \le j < n_i - 1$.

Оператор $P_{(\lambda_i,j)}(A)$, где $P_{(\lambda_i,j)}$ — базисный интерполяционный полином типа $(i,j) \in J$ с множеством узлов Λ, назовем *резольвентой Лагранжа типа $(i,j) \in J$ оператора A.*

К оператору A применимы все результаты предыдущего параграфа. Например, если $\lambda \in K$ не содержится в множестве Λ корней полинома P, то, согласно следствию 4.8, *оператор $A - \lambda I$ обратим, причем*

$$(A-\lambda I)^{-1} = \sum_{(i,j) \in J} \frac{P_{(\lambda_i,j)}(A)}{(\lambda_i - \lambda)^j}.$$

Оператор A кроме того, что является элементом алгебры V, действует на пространстве $\mathcal{L}$. Результаты параграфа 1 позволяют явно разложить пространство $\mathcal{L}$ в прямую сумму подпространств, инвариантных относительно действия оператора A.

Теорема 5.1. *Пусть оператор A удовлетворяет уравнению (9), Тогда: а) Резольвенты Лаграмжа $P_{\lambda_i}(A)$ оператора A удовлетворяют следующим соотношениям:*

1) $P_{(\lambda_1,0)}(A)+\cdots+P_{(\lambda_k,0)}(A)=I$,
2) $P_{(\lambda_i,j_1)}(A)P_{(\lambda_m,j_2)}(A)=0$ *при* $i\neq m$,
3) $P_{(\lambda_i,j)}(A)P_{(\lambda_i,m)}(A)=P_{(\lambda_i,j+m)}(A)$,
4) $(A-\lambda_i I)P_{(\lambda_i,j)}(A)=P_{(\lambda_i,j+1)}(A)$.

б) Пространство $\mathcal{L}$ раскладывается в прямую сумму пространст $\mathcal{L}_i$, где $\mathcal{L}_i$ — образ пространства $\mathcal{L}$ под действием оператора $P_{(\lambda_i,0)}(A)$,

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}_1+\cdots+\mathcal{L}_k,$$

(некоторые из пространст $\mathcal{L}_i$ могут равняться нулю).

с) Для векторов $u\in\mathcal{L}_i$ пространства $\mathcal{L}_i$ выполняется тождество $(A-\lambda_i I)^{n_i}u=0$.

Доказательство. Равенства операторов из пункта а) являются формальными следствиями сравнений из утверждения 4.10. Действительно, так как оператор A удовлетворяет сравнению $P(A)=0$, то для любых двух полиномов Q_1 и Q_2, сравнимых по модулю P, справедливо равенство $Q_1(A)=Q_2(A)$. Пункт б) вытекает из равенства 1) и из равенства $P^2_{(\lambda_i,0)}(A)=P_{(\lambda_i,0}(A)$. Из равенства пункта 4) следует что $(A-\lambda_i I)^{n_i}P_{(\lambda_i,0)}(A)=P_{(\lambda_i,n_1)}(A)$. Отсюда вытекает пункт с), так как каждый вектор u пространства $\mathcal{L}_i$ представим в виде $u=P_{(\lambda_i,0)}(A)v$ для некоторого вектора $v\in\mathcal{L}$ и оператор $P_{(\lambda_i,n_1)}(A)$ равен нулю.

Для каждого вектора $u\in\mathcal{L}$ вектор $u_{(\lambda_i,j)}=P_{(\lambda_i,j)}(A)u$ будем называть *резольвентой Лагранжа типа $(i,j)\in J$ вектора u* относительно оператора A.

Следствие 5.2. *Всякий вектор $u\in\mathcal{L}$ представим в виде суммы своих резольвент Лагранжа типа $(\lambda_i,0)$ относительно оператора A, т.е. $u=u_{(\lambda_i,0)}+\cdots+u_{(\lambda_k,0)}$. Справедливо тождество $(A-\lambda_i I)u_{(\lambda_i,j)}=u_{(\lambda_i,j+1)}$.*

5.2. Теорема Гамильтона–Кэли. Ниже при доказательстве теоремы Гамильтона–Кэли, мы будем предполать, что поле K содержит все корни полиномиального уравнения $P(A)=0$, которому удовлетворяет оператор A. Это предположение не ограничительно (если оно не выполнено, то поле K можно вложить в большее поле K_1, содержащее все корни полинома P, и расширить векторное пространство, превратив его в пространство над полем K_1. При желании читатель может ограничиться полем $K=\mathbb{C}$, в котором предположение автоматически выполнено).

Рассмотрим оператор A, действующий на конечномерном векторном пространстве L над полем K.

Утверждение 5.3. *Пусть оператор $A-\lambda_0 I$ при некотором $\lambda_0\in K$ нильпотентен. Тогда оператор A аннулируется своим характеристическим полиномом.*

Доказательство. По условию, оператор $A-\lambda_0 I$ в некоторой степени N равен нулю, т.е. оператор A аннулируется полиномом $P(x)=(x-\lambda_0)^N$, имеющим едиственный корень λ_0. Согласно следствию 0.4, оператор $A-$

λI при $\lambda \neq \lambda_0$ обратим. Отсюда вытекает, во-первых, что минимальный полином M_A оператора A имеет вид $M_A = (x - \lambda_0)^k$ при некотором k (см. теорему 0.6), во-вторых, что характеристический полином $\chi_A(\lambda)$ оператора A равен $(\lambda - \lambda_0)^l$, где l — размерность пространства L. По утверждению 0.7, степень полинома M_A не превосходит размерности l, т.е. $k \leq l$, откуда следует, что полином χ_A делится на полином M_A. Поэтому полином χ_A аннулирует оператор A.

Теорема Гамильтона–Кэли. *Пусть оператор $A : L \to L$ удовлетворяет некоторому уравнению $P(A) = 0$, корни которого лежет в поле K. Тогда оператор A аннулируется своим характеристическим полиномом.*

Доказательство. Согласно теореме 5.1, пространство L представимо в виде прямой суммы простанств L_i, инвариантных относительно A, на каждом из которых ограничение A_i оператора A равно сумме нильпотентного оператора и оператора вида $\lambda_i I$. Характеристический полином χ_A оператора A равен произведению характеристических полиномов χ_{A_i} операторов A_i. Поэтому, согласно утверждению 5.3, характеристический полином χ_A оператора A аннулирует ограничение оператора A на каждое из подпространств L_i. Следовательно полином χ_A аннулирует оператор A.

5.3. Реккурентные последовательности. Вернемся к решению задач A, B и C о реккурентных последовательностях из п. 0.1. Мы откажемся от предположения, что все корни характеристического полинома P реккурентной последовательности различны. Но, по-прежнему, будем считать, что все они содержатся в поле K, т.е. будем считать, что $P(x) = \prod_{i=1}^{k} (x - \lambda_i)^{n_i}$, где $\lambda_i \in K$. Мы будем пользоваться обозначениями и рассуждениями из п.2.2.

Решение задачи A. *Для последовательности $\mathbf{u}$, удовлетворяющей реккурентному уравнению (1), характеристическое уравнение (2) которого имеет корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ кратностей $n_1 \ldots, n_k$, справедливо тождество:*

$$u_N = \sum_{(i,j) \in J} C_N^j \lambda_i^{N-j} P_{(\lambda_i, j)} \langle u_0, \ldots, u_{n-1} \rangle,$$

где $P_{(\lambda_i, j)}$ — базисные интерполяционные полиномы для интерполяционной задачи с узлами $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ кратностей $n_1 \ldots, n_k$.

Решение задачи B. *Для последовательности $\mathbf{u}$, удовлетворяющей реккурентному уравнению (1), характеристическое уравнение (2) которого имеет корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ кратностей $n_1 \ldots, n_k$ справедливо тождество:*

$$\sum_{0 \leq N}^{\infty} \frac{u_N}{N!} t^N = \sum_{(i,j) \in J} \frac{t^j}{j!} \exp(\lambda_i t) P_{(\lambda_i)} \langle u_0, \ldots, u_{n-1} \rangle,$$

где $P_{(\lambda_i, j)}$ — базисные интерполяционные полиномы для интерполяционной задачи с узлами $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ кратностей $n_1 \ldots, n_k$.

Задачи A и B решаются дословно также как их частные случаи, соответствующие случаю некратных корней характеристического уравнения (см.

п. 2.2). Нужно только вместо ссылки на теоремы 1.4$'$ и 1.5$'$ ссылаться на теоремы 4.3$'$ и 4.4$'$ и использовать интерполяцию функций x^N и $\exp tx$ с кратными узлами интерполирования (см. п. 3.4).

Решение задачи C. *Для последовательности* $\mathbf{u}$, *удовлетворяющей реккурентному уравнению (1), характеристическое уравнение (2) которого имеет корни* $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ *кратностей* $n_1\dots,n_k$, *для* $\lambda\in\mathbb{C}$, *при* $i=1,\dots,n$, *удовлетворяющего неравенству* $|\lambda|>|\lambda_i|$, *справедливо тождество*

$$\sum_{0\le N}^{\infty}\frac{u_N}{\lambda^{N+1}}=\sum_{(i,j)\in J}\frac{P_{(\lambda_i,j)}\langle u_0,\dots,u_{n-1}\rangle}{(\lambda-\lambda_i)^j}.$$

Действительно, интерполяционный полином Лагранжа L с узлами интерполирования $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ кратностей $n_1,\dots,n_k$ для функции $F(x)=1/(\lambda-x)$ задается следующей формулой

$$L=\sum_{(i,j)\in J}\frac{P_{(\lambda_i,j)}(x)}{(\lambda-\lambda_i)^j}.$$

Пример. Реккурентное уравнение второго порядка $a_0u_k+a_1u_{k+1}=u_{k+2}$ с начальными данными u_0 и u_1, характеристическое уравнение которого имеет кратный корень $\lambda_1=\lambda_2$.

Воспользовавшись формулой из п. 3.9, получим, что интерполяционный полином функции x^N с узлом λ_1, кратности два, равен

$$N\lambda_1^{N-1}x+[\lambda_1^N-N\lambda_1^{N-1}\lambda_1].$$

Поэтому в рассматриваемом примере

$$u_N=N\lambda_1^{N-1}u_1+[\lambda_1^N-N\lambda_1^{N-1}\lambda_1]u_0.$$

Пример. Рассмотрим реккурентное уравнения второго порядка из предыдущего примера, предполагая дополнительно, что поле K есть поле комплексных чисел $K=\mathbb{C}$ и что в пространсве $\mathcal{L}$ введена разумная топология.

Воспользовавшись формулой из п. 3.9, получим, что интерполяционный полином функции $\exp(tx)$ с узлом λ_1 равен

$$t\exp(\lambda_1t)x+[\exp(\lambda_1t)-\lambda_1t\exp(\lambda_1t)].$$

Поэтому в рассматриваемом примере

$$\sum_{0\le N}^{\infty}\frac{u_N}{N!}t^N=t\exp(\lambda_1t)u_1+[\exp(\lambda_1t)-\lambda_1t\exp(\lambda_1t)]u_0.$$

Пример. Рассмотрим реккурентное уравнения второго порядка из предыдущего примера, предполагая дополнительно, что поле K есть поле комплексных чисел $K = \mathbb{C}$ и что в пространсве $\mathcal{L}$ введена разумная топология.

Воспользовавшись формулой из п. 3.9, получим, что интерполяционный полином функции $1/(\lambda - x)$ с узлом λ_1 равен

$$\frac{x + (\lambda - 2\lambda_1)}{(\lambda - \lambda_1)^2}.$$

Поэтому в рассматриваемом примере

$$\sum_{0 \le N}^{\infty} \frac{u_N}{\lambda^{N+1}} = \frac{u_1 + (\lambda - 2\lambda_1)u_0}{(\lambda - \lambda_1)^2}.$$

5.4. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Пусть L — конечномерное комплексное пространство и $A : L \to L$ — линейный оператор. Вернемся к задаче II из п. 0.2 и найдем все решения уравнения $y' = Ay$, удовлетворяющие начальному условию $y(t_0) = u \in L$.

Прежде всего отметим, что если вектор-функция y удовлетворяет уравнению $y' = Ay$, то l-я производная y равна $A^l y$. Приступим к решению задачи II. Начнем с простейшего уравнения.

Утверждение 5.4. *Пусть для некоторого $k \ge 0$ оператор A удовлетворяет тождеству $A^k = 0$. Тогда существует единственное решение задачи* II. *Оно задается формулой:*

$$y(t) = u + Au(t - t_0) + \cdots + A^{k-1}u\frac{(t - t_0)^{k-1}}{(k-1)!}. \tag{16}$$

Доказательство. Если вектор-функция y — решение, то так как ее k-я производная $y^{(k)}$ тождественно равна нулю, она является полиномом степени $< k$ по переменной t с векторными коэффициентами. Далее, в точке t_0 имеем $y^{(l)}(t_0) = A^l u$. Поэтому вектор-функция y должна задаваться формулой (16). С другой стороны, легко непосредственно проверить, что вектор-функция заданная формулой (16), действительно, является решением задачи II.

Утверждение 5.5. *Пусть $v(t) = y(t)\exp\lambda(t - t_0)$. Тогда вектор-функция y удовлетворяет уравнению $y' = Ay$ и начальному условию $y(t_0) = u$, если и только если вектор-функция v удовлетворяет уравнению $v' = (A + \lambda I)v$ и начальному условию $v(t_0) = u$.*

Доказательство. Дифференцируя тождество $v(t) = y(t)\exp\lambda(t - t_0)$, получим $v'(t) = (y'(t) + \lambda y(t))\exp\lambda(t - t_0)$. Если $y' = Ay$, то $v' = (y'(t) + \lambda y(t))\exp\lambda(t - t_0) = (A + \lambda I)y\exp\lambda(t - t_0) = (A + \lambda I)v$. Далее, $v(t_0) = y(t_0) = u$. Утверждение в одну сторону доказано. В другую сторону оно проверяется также.

Следствие 5.6. *Пусть для некоторого $k \geq 0$ и для некоторого комплексного $\lambda \in \mathbb{C}$ оператор A удовлетворяет тождеству $(A-\lambda I)^k = 0$. Тогда существует единственное решение задачи* II. *Оно задается формулой:*

$$y(t) = \left[u + (A-\lambda I)u(t-t_0) + \dots + (A-\lambda I)^{k-1}u\frac{(t-t_0)^{k-1}}{(k-1)!}\right]\exp\lambda(t-t_0).$$

Доказательство. Согласно утвеждению 5.5, функция y является решением, если и только если функция $v(t) = y(t)\exp -\lambda(t-t_0)$ удовлетворяет уравнению $v' = Bv$, где $B = (A-\lambda I)$, и начальному условию $v(t_0) = u$. По условию, $B^k = 0$. В силу утверждения 5.4, функция v задается формулой:

$$v(t) = u + Bu(t-t_0) + \dots + B^{k-1}u\frac{(t-t_0)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Так как $v(t) = y(t)\exp(-\lambda(t-t_0))$ и $B = A-\lambda I$, утверждение доказано.

Перейдем к общему случаю. Пусть оператор A удовлетворяет полиномиальному уравнению (9), где $P = \prod_{1\leq i\leq k}(x-\lambda_i)^{n_i}$ — полином с множеством корней $\Lambda \in \mathbb{C}$ и J — множество пар (i,j), где $1 \leq i \leq k,\ 0 \leq j < n_i$.

Теорема 5.7. *Пусть оператор A удовлетворяет тождеству $P(A) = 0$. Тогда существует единственное решение задачи* II. *Оно задается формулой:*

$$y(t) = \sum_{(i,j)\in J} P_{(\lambda_i,j)}\langle u, Au, \dots, A^{k-1}u\rangle \frac{(t-t_0)^j \exp\lambda_i(t-t_0)}{j!}, \tag{17}$$

где $P_{(\lambda_i,j)}$ — базисные интерполяционные полиномы для интерполяционной задачи с узлами $\lambda_1,\dots,\lambda_k$, кратностей $n_1\dots,n_k$.

Доказательство. Оператор A на пространстве L удовлетворяет уравнению $P(A) = 0$. Рассмотрим пространство $\mathcal{L}$ решений уравнения $y' = Ay$ (априори $\mathcal{L}$ могло бы быть бесконечномерным пространством). На $\mathcal{L}$ действует оператор дифференцирования D, причем для всякого $y \in \mathcal{L}$ и для всякого $t \in \mathbb{R}$ справедливо тождество $Dy(t) = Ay(t)$. Поэтому на $\mathcal{L}$ оператор D удовлетворяет уравнению $P(D) = 0$.

Обозначим через L_i образ пространства L под действием резольвенты Лагранжа $P_{(\lambda_i,0)}(A)$ оператора A. Согласно теореме 5.1, ограничение оператора A на пространство L_i удовлетворяет тождеству $A^{n_i} = 0$. Более того, для $m \geq 0$ справеливо тождество $(A-\lambda_i I)^m P_{(\lambda_i,0)}(A) = P_{(\lambda_i,m)}(A)$ (тождество $A_i^{n_i} = 0$ вытекает из того, что резольвента $P_{(\lambda_i,n_i)}$ равна нулю).

Если $y \in \mathcal{L}$, то вектор-функция $y_{(\lambda_i,0)} = P_{(\lambda_i,0)}y$ удовлетворяет уравнению $y'_{(\lambda_i,0)} = Ay_{(\lambda_i,0)}$, а все значения этой вектор-функции принадлежат пространству L_i. Поэтому дифференциальное уравнение $y'_{(\lambda_i,0)} = Ay_{(\lambda_i,0)}$ удовлетворяет условую следствие 5.6 для $k = n_i$. Кроме того, $y_{(\lambda_i,0)}(t_0) = P_{(\lambda_i,0)}\langle u,\dots,A^{n-1}u\rangle$ и для любого $0 \leq m < n_i$ справедливо равенство $(A-\lambda_i I)^m y_{(\lambda_i,0)}(t_0) = P_{(\lambda_i,m)}(A)\langle u,\dots,A^{n-1}u\rangle$. Применяя следствие 5.6, получим:

$$y_{(\lambda_i,0)}(t) = \sum_{0\leq j<n_i} P_{(\lambda_i,j)}\langle u, Au, \dots, A^{n-1}u\rangle \frac{(t-t_0)^j \exp\lambda_i(t-t_0)}{j!}.$$

По теореме 5.1, вектор-функция $y \in \mathcal{L}$ является суммой своих резольвент Лагранжа $y = y_{(\lambda_1,0)} + \cdots + y_{(\lambda_k,0)}$ относительно оператора D. Мы доказали, что если решение с начальным условием $y(t_0) = u$ существует, то оно единственно и задается формулой (17).

Осталось показать, что уравнение $y' = Ay$ имеет решение для любого начального данного $y(t_o) = u$. Под действием оператора A пространство L разбивается в сумму инвариантных подпроstванств $L = L_1 + \ldots, +L_k$, таких, что ограничение оператора A на подпространство L_i удовлетворяет уравнению $(A-\lambda_i I)^{n_i} = 0$. Вектор $u \in L$ представим в виде $u = u_1 + \cdots + u_k$, где $u_i \in L_i$. Согласно следствию 5.6, уравнение $y_i' = Ay_i$, $y_i(t_0) = u_i$ на вектор-функцию $y_i : \mathbb{R} \to L_i$ имеет решение. Функция $y = y_1 + \cdots + y_k$ удовлетворяет уравнению $y' = Ay$ и $y(t_0) = u_1 + \cdots + u_k = u$.

Теорема 5.7 полностью доказана.