"Алгебры инвариантов и 14-я проблема Гильберта"

курс И.В. Аржанцева

летняя школа "Современная математика", Дубна, 19-25 июля 2007 года

Задачи к занятию 1

Задача 1. Пусть F_2 – свободная группа, порожденная элементами x и y. По определению это означает, что элементами группы F_2 являются слова вида $x^{a_1}y^{b_1}x^{a_2}y^{b_2}\dots x^{a_s}y^{b_s}$, где $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{N}$, в качестве операции выступает приписывание слов с естественными правилами сокращения $xx^{-1} = x^{-1}x = yy^{-1} = y^{-1}y = e$, где e – это пустое слово (все a_i и b_j равны нулю), которое является нейтральным элементом группы F_2. Докажите, что подгруппа $H \subset F_2$, порожденная элементами вида $x^n y x^n, n \in \mathbb{Z}$, не является конечно порожденной.

Задача 2. Докажите, что любая подгруппа в $(\mathbb{Z}, +)$ может быть порождена одним элементом.

Задача 3. Докажите, что $(\mathbb{Q}, +)$ – счетная коммутативная группа, не являющаяся конечно порожденной.

Задача 4. Найдите минимальную систему порождающих подгруппы H группы $\mathbb{Z}^3$, заданной условиями

а) $H = \{(a_1, a_2, a_3) : a_1 + a_2 + a_3 = 0\}$;

б) $H = \{(a_1, a_2, a_3) : 3 \mid a_1 + a_2;\ 4 \mid a_2 + a_3\}$.

Задача 5. Содержит ли подполе в $\mathbb{Q}(x)$, порожденное элементом $\frac{x^2-3}{x^2-4}$, элемент $\frac{x^4-5}{x^4-6}$?

Задача 6. Докажите, что каждая подалгебра в $\mathbb{K}[x]$ конечно порождена.

Задача 7. Пусть A – подалгебра в $\mathbb{K}[x]$, порожденная элементами вида $(x-1)^n(x-2)^m + c$, $n > 0, m > 0, c \in \mathbb{K}$. Найдите минимальную систему порождающих алгебры A.

Задача 8. Найдите минимальную систему порождающих идеала

$$I = \{F(x, y) : F(0, 0) = F(1, 0) = 0\} \text{ в } \mathbb{K}[x, y].$$