"Алгебры инвариантов и 14-я проблема Гильберта"

курс И.В. Аржанцева

летняя школа "Современная математика", Дубна, 19-25 июля 2007 года

Задачи к занятию 2

Задача 1. Пусть $A_n \subset S_n$ – подгруппа четных перестановок. Найдите образующие алгебры инвариантов $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]^{A_n}$.

Задача 2. Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ и G – группа третьего порядка, порожденная линейным преобразованием

$$x_1 \to -\frac{1}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2, \quad x_2 \to -\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2.$$

Найдите образующие алгебры инвариантов $\mathbb{R}[x_1, x_2]^G$.

Задача 3. Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ и $\epsilon \in \mathbb{C}$ – первообразный корень степени n из единицы. Рассмотрим группу G порядка n, действующую преобразованиями $x_1 \to \epsilon^k x_1, x_2 \to \epsilon^k x_2$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Найдите образующие алгебры инвариантов $\mathbb{C}[x_1, x_2]^G$.

Задача 4. Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ и $\epsilon \in \mathbb{C}$ – первообразный корень степени n из единицы. Рассмотрим группу G порядка n, действующую преобразованиями $x_1 \to \epsilon^k x_1, x_2 \to \epsilon^{-k} x_2$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Найдите образующие алгебры инвариантов $\mathbb{C}[x_1, x_2]^G$.

Задача 5. Пусть G – конечная подгруппа в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Докажите, что элементы

$$P(x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}), \quad i_1 + i_2 + \cdots + i_n \le |G|$$

порождают алгебру $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^G$.

Задача 6. Приведите пример поля, в котором $-1 = 1$. Может ли такое поле быть бесконечным ?

Задача 7. $(*)$ Пусть $\mathbb{K}$ – поле положительной характеристики и $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ – конечная подгруппа. Докажите, что алгебра инвариантов $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]^G$ конечно порождена. Верно ли, что она порождается инвариантами степени $\le |G|$?