"Алгебры инвариантов и 14-я проблема Гильберта"

курс И.В. Аржанцева

летняя школа "Современная математика", Дубна, 19-25 июля 2007 года

Задачи к занятию 3

Задача 1. Пусть тор T^r действует на $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ по формулам $x_i \to \chi_i(t)x_i$, $\chi_1, \dots, \chi_n \in \mathbb{Z}^r$. Докажите, что $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]^{T^r} = \mathbb{K}$ тогда и только тогда, когда все χ_i отличны от $(0, \dots, 0)$ и конус $\{\lambda_1\chi_1 + \dots + \lambda_n\chi_n : \lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$ в $\mathbb{R}^r$ не содержит прямых.

Задача 2. Задайте системой линейных неравенств конус

$$C = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 : \lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}\} \subset \mathbb{R}^3,$$

где $v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (0, 0, 1), v_4 = (1, 1, -1)$.

Задача 3. Представьте конус

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 0,\ -x_1 - x_2 - x_3 \geq 0,\ x_1 + 2x_2 \geq 0$$

в виде $\{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_s v_s : \lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}\} \subset \mathbb{R}^3$.

Задача 4. Приведите пример рационального полиэдрального конуса $C \subset \mathbb{R}^n$ такого, что набор порождающих $C(\mathbb{Z})_+ \cup \{v_1, \dots, v_N\}$ полугруппы $C(\mathbb{Z})$ не является минимальным.

Задача 5. Рассмотрим линейные преобразования $x_1 \to t_1^2 x_1, x_2 \to t_1^3 x_2, x_3 \to t_1^{-5} x_3$. Найдите образующие алгебры инвариантов $\mathbb{K}[x_1, x_2, x_3]^{T^1}$.

Задача 6. Докажите, что неконечнопорожденная подалгебра $A \subset \mathbb{K}[x_1, x_2]$, рассмотренная на занятии 1, не может быть реализована как алгебра инвариантов $\mathbb{K}[x_1, x_2]^G$ для какой-либо подгруппы $G \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$.