КРИТИЧЕСКИЕ ЗНАЧЕНИЯ МНОГОЧЛЕНОВ

ЧАСТЬ 2: АНАЛИЗ

Добавим к множеству комплексных чисел $\mathbb{C}$ символ ∞; полученное множество $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ традиционно обозначается $\mathbb{C}P^1$ и называется комплексной проективной прямой или сферой Римана.

В дальнейшем нам нужно будет работать с непрерывностью, пределами и т.п. понятиями. Если $a\in\mathbb{C}$, то утверждение $z_n\to a$ при $n\to\infty$ означает, что $\lim_{n\to\infty}|z_n-a|=0$; если же $a=\infty$, то это утверждение означает, по определению, что $\lim_{n\to\infty}|z_n|=+\infty$. Таким образом, “малая окрестность точки ∞” (в которой, по определению предела, должны лежать все члены последовательности z_n, кроме конечного их числа) это дополнение к достаточно большому кругу $\Omega\subset\mathbb{C}$ с центром в начале координат. Геометрически множество $\mathbb{C}P^1$ выглядит как двумерная сфера: ее северным полюсом является точка ∞, а остальные точки отождествляются с точками плоскости $\mathbb{C}$ с помощью проекции из северного полюса на экваториальную плоскость (при такой проекции малая окрестность северного полюса переходит на плоскости в дополнение к кругу большого радиуса). Отсюда название “сфера Римана”.

Пусть $P:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ — многочлен степени n. Доопределим его до отображения сфер Римана $P:\mathbb{C}P^1\to\mathbb{C}P^1$, полагая $P(\infty)=\infty$. Поскольку $\lim_{|z|\to+\infty}|P(z)|=+\infty$, полученное отображение будет непрерывным в точке ∞; во всех остальных точках оно тоже, разумеется, непрерывно.

В дальнейшем нам потребуются некоторые сведения о дифференцируемых функциях комплексного переменного. Производной функции $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ в точке $a\in\mathbb{C}$ называется число $f'(a)=\lim_{z\to a}(f(z)-f(a))/(z-a)$. Определение текстуально совпадает с соответствующим определением для функций вещественного переменного, и некоторые результаты вещественного анализа — например, формула Тейлора — переносятся на комплексный случай без изменения. Также имеет место

Теорема 1 (теорема об обратной функции для функций одного комплексного переменного)**.** *Пусть $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ — непрерывно дифференцируемая функция, причем $f(0)=0$ и $f'(0)\neq 0$. Тогда в достаточно малом круге $\Omega\subset\mathbb{C}$ с центром в начале координат существует и единственна функция $g:\Omega\to\mathbb{C}$ такая, что $f(g(z))=g(f(z))=z$, $g(0)=0$. Функция g непрерывно дифференцируема, и $g'(0)=1/f'(0)$.*

Доказывать эту теорему мы не будем (это частный случай фундаментальной теоремы об обратном отображении). Отметим лишь, что аналогичный результат для вещественных функций одного переменного — несложное упражнение.

Следствие. *Пусть функция f обладает k непрерывными производными, причем $f(0)=f'(0)=\dots=f^{(k-1)}(0)=0$ и $f^{(k)}(0)=0$. Тогда в достаточно малом круге Ω существует функция g такая, что $g(0)=0$, $g'(0)\neq 0$ и $f(g(z))=z^k$.*

Доказательство. Из формулы Тейлора вытекает, что $f(z)=f^{(k)}(0)/k!\cdot z^k+R_k(z)$, где $\lim_{z\to 0}R_k(z)/z^k=0$. Полагая $F(z)=f^{(k)}(0)/k!+R_k(z)/z^k$, получим представление $f(z)=z^kF(z)$, где функция F непрерывна и $F(0)\neq 0$. В достаточно малой окрестности точки $F(0)\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ существует гладкая функция $r(z)=z^{1/k}$, обладающая тем свойством, что $r^k(z)=z$ (заметим, что в окрестности начала координат такой функции нет!). В силу непрерывности F функция $\Phi(z)\stackrel{\text{def}}{=}r(F(z))$ определена и непрерывна в некотором круге с центром в начале координат. Положим $h(z)\stackrel{\text{def}}{=}z\Phi(z)$; тогда $h'(0)=\Phi(0)\neq 0$. Согласно теореме об обратной функции, существует функция g такая, что $h(g(z))=z$. Поскольку $f(z)=(h(z))^k$, получаем требуемый результат. □

Точку a, в которой $f'(a)=\dots=f^{(k-1)}(a)=0$ и $f^{(k)}(a)\neq 0$, называется критической точкой типа A_k (здесь $k\geq 1$; $k=1$ означает, что точка некритическая). Понятие дифференцируемости и критической точки типа A_k удобно определить для произвольных отображений $f:\mathbb{C}P^1\to\mathbb{C}P^1$. Если $a\neq\infty$ и $f(a)\neq\infty$, то все уже определено. Если $a\neq\infty$, но $f(a)=\infty$, то функция дифференцируема в точке a и точка a имеет тип A_k, если она имеет тип A_k для функции $g(z)=1/f(z)$. Если $f(\infty)\neq\infty$, то ∞ является точкой типа A_k, если 0 является такой точкой для функции $g(z)=f(1/z)$; дифференцируемость означает наличие у g производной в нуле. Если $f(\infty)=\infty$, то определение такое же, но надо рассматривать функцию $g(z)=1/f(1/z)$.

Пример 1. Точка ∞ имеет тип A_{n-1} для всякого многочлена $P(z)$ степени n. Действительно, $1/P(1/z)=O(z^n)$, но $\neq O(z^{n+1})$ при $z\to 0$.

Пример 2. Произвольную дробно-рациональную функцию $f(z)=P(z)/Q(z)$ (где P и Q — многочлены, не имеющие общих корней) также можно продолжить до отображения $\mathbb{C}P^1\to\mathbb{C}P^1$. Для этого положим $f(a)=$

∞, если $Q(a) = 0$; также положим $f(\infty) = \lim_{z\to\infty} P(z)/Q(z)$ — этот предел (конечный или бесконечный) существует всегда. Для такой функции точка $a \in \mathbb{C}$ имеет тип A_k, если она является корнем кратности $k-1$ либо у P, либо у Q. Точка ∞ имеет тип A_s, где $s = 1 + |\deg P - \deg Q|$. Тем самым у дробно-рациональной функции любая точка $a \in \mathbb{C}P^1$ имеет тип A_k для некоторого k, причем $k > 1$ лишь для конечного числа точек (остальные точки — некритические).

Нарисуем теперь на комплексной плоскости две гладкие кривые ν_1 и ν_2, пересекающиеся в начале координат, и пусть $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — дифференцируемая функция, причем $f(0) = 0$ (для удобства) и $f'(0) \neq 0$. Согласно теореме об обратной функции образы $\gamma_1 = f(\nu_1), \gamma_2 = f(\nu_2)$ вблизи начала координат это две кривые. Имеем $\gamma_i(t) = f(\nu_i(t)) = f'(0)\nu_i(t) + o(t)$ при $t \to 0$, $i = 1, 2$. Таким образом, касательные векторы к кривым γ_1, γ_2 в начале координат получаются из касательных векторов к кривым ν_1, ν_2 умножением на одно и то же комплексное число $f'(0)$. Умножение на такое комплексное число это композиция растяжения плоскости в $|f'(0)|$ раз и поворота на угол $\arg f'(0)$. Такое преобразование сохраняет углы, так что угол между касательными к кривым ν_1 и ν_2 равен углу между касательными к γ_1 и γ_2. Тем самым доказано такое утверждение:

Предложение 1. *Дифференцируемая функция комплексного переменного сохраняет углы между кривыми, пересекающимися в некритической точке.*

Пусть теперь f — гладкая функция, и 0 — ее критическая точка типа A_k. Тогда согласно следствию из теоремы об обратной функции, $f(z) = h(z)^k$, где $h(0) = 0$, $h'(0) \neq 0$. Функция h сохраняет углы между кривыми, пересекающимися в начале координат, а функция $z \mapsto z^k$ переводит прямые, проходящие через начало координат, в прямые, а углы между ними увеличивает в k раз. Таким образом,

Предложение 2 (обобщение предложения 1)**.** *Дифференцируемая функция комплексного переменного увеличивает в k раз углы между кривыми, пересекающимися в критической точке типа A_k.*

Следствие. *Пусть f — дифференцируемая функция, 0 — ее критическая точка глубины k, а γ — гладкая кривая, начинающаяся в нуле. Тогда прообраз $f^{-1}(\gamma)$ вблизи нуля состоит из k отрезков кривых, пересекающихся под углами $2\pi/k$.*

Одно из чудес анализа функций комплексного переменного заключается в том, что пример 2 является исчерпывающим:

Теорема 2. *Если функция $f : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$ всюду дифференцируема, то она дробно-рациональна.*

Замечание 1. Для функций $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ теорема неверна: можно, например, положить $f(z) = e^z$. Поскольку $\lim_{z\to+\infty} e^z = \infty$, а $\lim_{z\to-\infty} e^z = 0$, эту функцию нельзя продолжить даже до непрерывного отображения $\mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$

Замечание 2. Из теоремы 2 и примера 2 вытекает, что у дифференцируемой функции $f : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$ любая точка имеет тип A_k. Для функций действительного переменного это утверждение неверно: если $f(x) \overset{\text{def}}{=} e^{-1/x^2}$ при $x \neq 0$ и $f(0) \overset{\text{def}}{=} 0$, имеем $f(x) = o(x^n)$ при $x \to 0$ и произвольном n. Отсюда по формуле Тейлора вытекает, что $f^{(n)}(0)$ существует и равна 0 при всех n — тем самым, 0 не является точкой типа A_k функции f ни при каком k.

Как можно закончить доказательство теоремы о симметрических многочленах. Как мы уже знаем, для любого симметрического многочлена $R(x_1, \dots, x_k)$ существует функция H такая, что $R(x_1, \dots, x_k) = H(e_1(x_1, \dots, x_k), \dots, e_k(x_1, \dots, x_k))$. Зафиксируем значения всех e_s, кроме какого-то одного e_i, и рассмотрим H как функцию своего i-го аргумента. Нетрудно проверить (проделайте это!), что такая функция H дифференцируема. Если $e_i(x_1, \dots, x_k) = \infty$ для какого-нибудь i, то $x_j = \infty$ для какого-то j — следовательно, $R(x_1, \dots, x_k) = \infty$, и $H = \infty$. Таким образом, H определена на $\mathbb{C}P^1$. Дифференцируемость в бесконечности проверяется аналогично дифференцируемости в конечной точке. Следовательно, H — дробно-рациональная функция, которая принимает бесконечное значение только в бесконечности, то есть не имеет полюсов. Следовательно, H как функция любого своего аргумента — многочлен; иными словами, это многочлен от n переменных. $\square$