КРИТИЧЕСКИЕ ЗНАЧЕНИЯ МНОГОЧЛЕНОВ

ЧАСТЬ 3: ТОПОЛОГИЯ

Нарисуем на сфере $\mathbb{C}P^1$ рисунок Γ, соединив точку ∞ с критическими значениями $c_1, \dots, c_{n-1}$ непересекающимися гладкими кривыми (см. рис. 1). Мы будем считать, что "на выходе" из точки ∞ кривые расположены в (циклическом) порядке номеров: сначала идет кривая, соединяющая ∞ с c_1, потом — с c_2, и т.д. Для этого, разумеется, нужно как-то пронумеровать критические значения; будем считать, что мы это раз и навсегда сделали. Такой рисунок (граф) называется системой отмеченных путей.

Рассмотрим теперь множество $P^{-1}(\Gamma) \subset \mathbb{C}P^1$. Это тоже граф, нарисованный на сфере; его вершины — прообразы точек ∞ и $c_1, \dots, c_{n-1}$, ребра — прообразы путей. Иными словами, вершины это точка ∞, критические точки $z_1, \dots, z_{n-1}$, а также точки, обозначенные в разделе "Анализ" $z_i^{(k)}$, $i = 1, \dots, n-1$, $k = 2, \dots, n-1$ (некритические прообразы критических значений). Вершины графа не совпадают и ребра, очевидно, не пересекаются. Общее количество вершин графа $P^{-1}(\Gamma)$ равно, таким образом, $1 + (n-1)^2 = n^2 - 2n + 2$. Точки, лежащие на отмеченных путях (не на их концах), не являются критическими значениями многочлена; таким образом, каждый отмеченный путь имеет n прообразов, и количество ребер графа $P^{-1}(\Gamma)$ равно $n(n-1) = n^2 - n$.

Нетрудно понять, как устроены окрестности вершин графа $P^{-1}(\Gamma)$. Каждое ребро графа соединяет вершину z_i или $z_i^{(k)}$ с вершиной ∞; тем самым, из вершины ∞ выходит $n^2 - 2n + 2$ ребер. Согласно теореме об обратной функции (см. раздел "Анализ") малая окрестность некритической вершины $z_i^{(k)}$ устроена так же, как окрестность вершины c_i — иными словами, в вершину $z_i^{(k)}$ входит только одно ребро ("висячая" вершина). Из следствия, приведенного в конце раздела "Анализ", вытекает, что окрестность критической вершины z_i содержит два ребра, расходящихся под углом π. Оба этих ребра соединяют вершины z_i и ∞, образуя тем самым петлю.

Иными словами, граф $P^{-1}(\Gamma)$ выглядит так: это $(n-1)$ непересекающихся петель, которые начинаются и кончаются в точке ∞; каждая петля проходит через критическую точку z_i; плюс имеются $(n-1)(n-2)$ висячих ребер, соединяющих точки ∞ и $z_i^{(k)}$. Граф $P^{-1}(\Gamma)$ связный. Из формулы Эйлера для связных плоских графов получаем, что он делит сферу Римана на $V - E - 2 = n^2 - 2n + 2 - (n^2 - n) - 2 = n$ частей.

Докажем теперь, что многочлен P устанавливает взаимно однозначное соответствие каждой из этих частей с множеством $\mathbb{C}P^1 \setminus \Gamma$. Если $a \notin \Gamma$, то $P^{-1}(a)$ состоит из n точек. Если взаимно однозначного соответствия нет, то какая-то из частей — обозначим ее Φ_0 — не содержит прообразов a. Пусть Φ_0 содержит прообраз β другой точки, $b \in \mathbb{C}P^1 \setminus \Gamma$. Сам граф Γ не разрезает $\mathbb{C}P^1$ на части, поэтому a и b можно соединить кривой τ, не пересекающей Γ.

Лемма (о поднятии пути)**.** *Пусть τ — непрерывная кривая, соединяющая точки a и b и не проходящая через критические значения непрерывно дифференцируемой комплексной функции f. Пусть $f(p) = a$. Тогда существует и единственна непрерывная кривая ν, начинающаяся в точке p и такая, что $f(\nu) = \tau$.*

Доказательство. Параметризуем кривую τ: $\tau(0) = a$, $\tau(1) = b$, и рассмотрим множество $\mathfrak{T}$ чисел $T \in [0,1]$ таких, что "поднятие" $(\nu(t))$ существует и единственно при $0 \le t \le T$. Множество $\mathfrak{T}$ непусто, поскольку содержит 0 ($\nu(0) = p$). Следовательно, у него существует точная верхняя грань — такое число T_*, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует $T \in \mathfrak{T}$ такое, что $T > T_* - \varepsilon$.

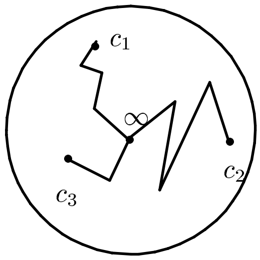

Рис. 1. Система отмеченных путей

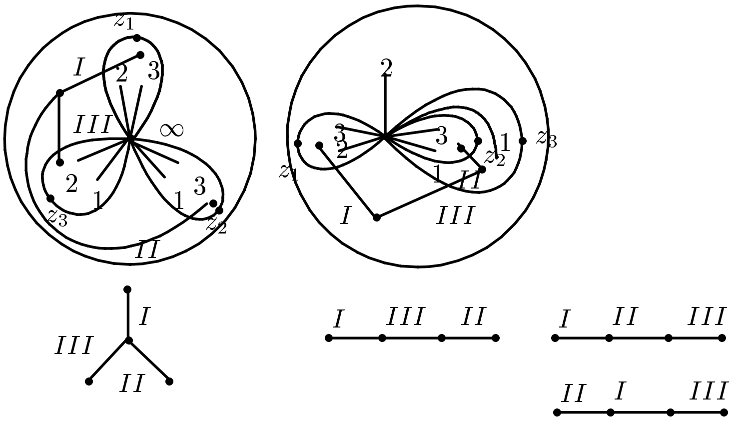

Рис. 2. Различные многочлены степени 4

Покажем, что $T_* \in \mathfrak{T}$. Точка $w = \tau(T_*)$ является некритическим значением для функции f. Согласно теореме об обратной функции, у w имеется окрестность W, прообраз которой состоит из нескольких экземпляров (возможно, бесконечного числа) U_i окрестностей, каждую из которых функция f отображает на W взаимно однозначно. Существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\tau(t) \in W$ при $t > T_* - \varepsilon$. В силу непрерывности все точки $\nu(t) \in f^{-1}(\tau(t))$ лежат ровно в одной из окрестностей U_i — для определенности, U_1. В этой окрестности точка $\tau(T_*)$ имеет единственный прообраз — возьмем его в качестве $\nu(T_*)$; по непрерывности, никакой другой прообраз точки $\tau(T_*)$ в качестве $\nu(T_*)$ и не подходит. Значит, кривая ν однозначно определена на отрезке $[0, T_*]$, и $T_* \in \mathfrak{T}$.

Пусть теперь $T_* < 1$. Возьмем уже упоминавшиеся окрестности W точки $\tau(T_*)$ и U_1 точки $\nu(T_*)$. При достаточно малом ε имеем $\tau(t) \in W$ при $T_* < t < T_* + \varepsilon$. У каждой такой точки $\tau(t)$ имеется, согласно теореме об обратной функции, единственный прообраз в окрестности U_1 — возьмем его в качестве $\nu(t)$. Тем самым, кривая ν однозначно определена при $t \in [0, T_* + \varepsilon/2]$, что противоречит тому, что $T_* < 1$ — верхняя грань $\mathfrak{T}$. $\square$

Рассмотрим теперь поднятие ν пути τ, начинающееся в точке $\beta \in \Phi_0 \cap P^{-1}(b)$. Второй конец ν — один из прообразов точки a. Поскольку, согласно предположению, Φ_0 не содержит прообразов a, этот прообраз лежит в другой части множества $\mathbb{C}P^1 \setminus P^{-1}(\Gamma)$. Отсюда вытекает, что кривая ν пересекает $P^{-1}(\Gamma)$, что противоречит тому, что τ не пересекает Γ.

Значит, исходное предположение (P^{-1} не пересекается с Φ_0) неверно — многочлен P взаимно однозначно отображает каждую из n частей $\mathbb{C}P^1 \setminus P^{-1}(\Gamma)$ на $\mathbb{C}P^1 \setminus \Gamma$. Каждая из этих частей топологически устроена как $\mathbb{C}P^1 \setminus \Gamma$, то есть как открытый круг. Геометрически каждая часть ограничена одной или несколькими петлями, начинающимися в ∞ и проходящими каждая через одну из критических точек, а также несколькими дугами, начинаюшимися в ∞ и заканчивающимися в критических точках.

Взаимное расположение этих частей может быть различным. Чтобы описать его, прежде всего сотрем все висячие вершины и ребра графа $P^{-1}(\Gamma)$ (мы потом убедимся, что их расположение можно восстановить практически однозначно по оставшимся вершинам и ребрам); теперь в графе $P^{-1}(\Gamma)$ осталось n вершин (∞ и $n-1$ критических точек) и $2n-2$ ребер — каждая критическая точка соединена с ∞ двумя ребрами, образующими петлю. Рассмотрим двойственный граф Δ_P — поставим в каждой из n частей $\mathbb{C}P^1 \setminus P^{-1}(\Gamma)$ по вершине; две вершины соединим ребром, если две соответствующие части граничат, т.е. имеют общее ребро. Каждое ребро графа Δ пересекает одну и только одну пару ребер (“петлю”) графа $P^{-1}(\Gamma)$. Таким образом, ребра Δ_P находятся во взаимно однозначном соответствии с критическими точками многочлена P; всего ребер $n-1$ и их можно перенумеровать от 1 до $n-1$ (напомним, что критические точки мы перенумеровали).

Количество вершин графа Δ_P равно n. Из любой части $\mathbb{C}P^1 \setminus P^{-1}(\Gamma)$ можно перейти в любую другую, пересекая несколько “петель” графа $P^{-1}(\Gamma)$ — следовательно, граф Δ_P связный. Связный граф с n вершинами и $n-1$ ребрами это дерево. Два примера построения дерева Δ_P см. на рис. 2; еще два дерева отличаются перенумерацией ребер — постройте рисунки для данных деревьев самостоятельно.

Существует еще одна конструкция графа Δ_P. Именно, выберем некритическое значение c многочлена P и соединим его путями с критическими значениями $c_1, \dots, c_{n-1}$ — так, как раньше это делалось для точки ∞; получится граф δ. Рассмотрим прообраз $P^{-1}(\delta)$. Он содержит n вершин $u_1, \dots, u_n$ валентности $n-1$ — прообразы значения c, $(n-1)$ вершин валентности 2 — критические точки $z_1, \dots, z_{n-1}$, и $(n-1)(n-2)$ висячих вершин — некритические прообразы $z_i^{(k)}$ критических значений $c_1, \dots, c_{n-1}$. Как мы уже установили выше, в каждой из частей множества $\mathbb{C}P^1 \setminus P^{-1}(\Gamma)$ содержится ровно одна вершина u_i. Через каждую вершину

z_i проходит пара ребер графа $P^{-1}(\delta)$, образующих угол π (то есть гладкую линию) — очевидно, эти ребра лежат в разных частях множества $\mathbb{C}P^1 \setminus P^{-1}(\Gamma)$. Тем самым, если у графа $P^{-1}(\delta)$ убрать висячие вершины вместе со входящими в них ребрами, получится Δ_P.