Данный текст содержит некоторое количество вводных задач, служащих общей цели "ввести понятия, которые нам потребуются в дальнейшем, и создать впечатление о соответствующих областях". Большая часть их формулировок и вводимых определений ни в коей мере не являются строгими, и воспринимать их нужно соответственно — как "задание идей".

1 Броуновское движение

Частица осуществляет случайное блуждание по целым точкам на прямой, начиная в нулевой момент времени в начале координат. Если в момент времени $n = 0, 1, 2, \dots$ она находится в точке k, то в момент времени $n+1$ она окажется либо в точке $k-1$, либо в точке $k+1$, в каждой с вероятностью $1/2$.

1. С какой вероятностью в момент времени n частица окажется в точке k?
Ответ. $\frac{C_n^{(n+k)/2}}{2^n}$.

2. Для какой точки k эта вероятность максимальна?

3. Докажите, что биномиальный коэффициент C_n^k возрастает, пока k пробегает от 0 до $n/2$, и убывает при k от $n/2$ до n.

4. Найдите сумму $\sum_{k=0}^{n} C_n^k$.

Пусть $|k| \ll n$. Следующие задачи посвящены оценке C_{2n}^{n+k}:

5. Проверьте, что

$$C_{2n}^{n+k} = C_{2n}^{n} \cdot \frac{n}{n+1}\frac{n-1}{n+2}\cdots\frac{n-k+1}{n+k}.$$

6. Использовав представление из предыдущей задачи и приближение $\ln(1+x) \approx x$ при малых x, оцените отношение

$$\frac{C_{2n}^{n+k}}{C_{2n}^{n}}.$$

Указание. Прологарифмируйте.
Ответ. $\frac{C_{2n}^{n+k}}{C_{2n}^{n}} \approx e^{-\frac{k^2}{n}}$.

Следующие две задачи являются (достаточно слабыми) формами закона больших чисел (ЗБЧ) и центральной предельной теоремы (ЦПТ) соответственно.

7. Будем теперь изменять масштабы по осям времени и пространства. А именно, пусть теперь частица прыгает каждую $1/N$ секунды на расстояние $\frac{1}{N}$ вправо или влево (с равной вероятностью). Докажите, что при $N \to \infty$ частица всё больше и больше "стоит на месте". А именно, что для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ вероятность того, что в момент времени $t = 1$ (после N прыжков) частица находится ε-близко к своему начальному положению, стремится к 1.

8. Пусть теперь масштабы по осям меняются так: частица прыгает каждую $1/N$ секунды на расстояние $\frac{1}{\sqrt{N}}$ с равной вероятностью влево или вправо. Докажите, что для любого отрезка $I = [x_0, x_1] \subset \mathbb{R}$ вероятность того, что точка попадёт в момент времени $t = 1$ в отрезок I, стремится к

$$\frac{1}{Z_1} \int_{x_0}^{x_1} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx,$$

где Z_1 — некоторая константа.
Указание. Используйте задачу 6, чтобы увидеть интегральные суммы Римана.

Замечание 1. Заключение задачи 8 утверждает, что предельное распределение (при $N \to \infty$) имеет плотность[1]

$$\rho_1(x) = \frac{1}{Z_1} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

К сведению. $Z_1 = \sqrt{2\pi}$.

На самом деле, никто не заставляет нас ограничиваться единичным сдвигом по времени:

9. В блуждании из задачи 8 предельная плотность в момент времени t составляет

$$\rho_t(x) = \frac{1}{Z_t} e^{-\frac{x^2}{2t}}.$$

К сведению. Распределение с плотностью $\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2t}}$ называется *гауссовым нормальным распределением* со средним a и дисперсией t, и обозначается $\mathcal{N}(a, t)$

Определение. Предел при $N \to \infty$ случайных блужданий из задачи 8 (что бы это ни значило) называется *броуновским движением.*

[1] Все слова этого предложения следует понимать в "физическом" смысле.

2 Конформные преобразования

В этом разделе мы по умолчанию предполагаем, что все объекты, с которыми мы работаем — “хорошие”. Так что в дальнейшем мы гладкость, если явно не оговорено противное, предполагаем по умолчанию.

Цель этого раздела — познакомить слушателей с понятием конформного отображения, некоторыми свойствами таких отображений и их применением.

Определение. Пусть две кривые пересекаются в точке P. *Углом* (в этой точке[2]) между ними называется угол между касательными к ним в этой точке.

Определение. Отображение f из области в $\mathbb{R}^n$ в R^n называется *конформным*, если оно сохраняет углы между кривыми.

Начиная с этого момента мы работаем на плоскости $\mathbb{R}^2$, которую естественно отождествляем с $\mathbb{C}$, а все отображения предполагаем сохраняющими ориентацию.

10. Докажите, что *линейное* сохраняющее ориентацию отображение плоскости есть композиция поворота и гомотетии.

11. Докажите, что линейное отображение l есть композиция поворота и гомотетии тогда и только тогда, когда в $\mathbb{C}$-интерпретации оно является умножением на ненулевое комплексное число, т.е. для некоторого $a \in \mathbb{C}^*$ имеем $l(z) = az$.

12. Докажите, что отображение конформно тогда и только тогда, когда его линейная часть в любой точке конформна.

Определение. Отображение $f : D \to \mathbb{C}$, где D — область в $\mathbb{C}$, называется *комплексно-дифференцируемым* в точке $z_0 \in D$, если существует предел

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Этот предел (если он существует) называется *(комплексной) производной* f в точке z_0 и обозначается $f'(z_0)$.

Определение. Если функция комплексно-дифференцируема в каждой точке некоторой области, то говорят, что она *голоморфна* в этой области.

[2] Вообще говоря, кривые могут пересекаться в нескольких точках.

13. (Условие Коши-Римана) Поймите, что вещественно-гладкое отображение комплексно-дифференцируемо тогда и только тогда, когда его линейная часть есть умножение на комплексное число — его производную.

14. Выведите из всего предыдущего, что отображение конформно в некоторой области, если и только если оно в этой области голоморфно, и его производная не обращается в ноль.
К сведению. Голоморфные отображения бесконечно дифференцируемы. Более того, они *аналитичны* — ряд Тейлора такой функции в достаточно малой окрестности сходится к ней, так что локально её можно представить как сумму сходящегося степенного ряда.

Итак, мы выяснили, что конформные и комплексно-дифференцируемые отображения суть одно и то же. В частности, поскольку всё, что можно выписать аналитической записью без операций модуля (сумма, разность, произведение, частное, синус, экспонента, и т. д.) как функцию от переменной z, будет комплексно-дифференцируемым, такое отображение будет конформным (там, где его производная не обращается в ноль).

Оказывается, что с конформной точки зрения есть только одна односвязная ("без дырок") область, являющаяся строгим подмножеством $\mathbb{C}$:

Теорема 1 (Римана об униформизации). *Пусть задана односвязная область $U \subset \mathbb{C}$, $U \neq \mathbb{C}$. Тогда существует конформное взаимно-однозначное преобразование U на единичный круг $D_1 = \{z : |z| < 1\}$.*

К сведению. Сама комплексная плоскость единичному кругу неэквивалентна.

Вот пример, явно предъявляющий такое преобразование в случае верхней полуплоскости:

15. Отображение $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ конформно отображает верхнюю полуплоскость $\Pi_+ = \{z \mid Im\, z > 0\}$ в единичный круг $D_1 = \{z : |z| < 1\}$.

16. Композиционное частное двух конформных отображений из U в D_1 есть конформный автоморфизм единичного диска D_1.
К сведению. Все конформные автоморфизмы как единичного диска, так и верхней полуплоскости дробно-линейны. Дробно-линейные автоморфизмы верхней полуплоскости имеют вид

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d},$$

где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и $ad - bc > 0$. Поскольку четвёрка a, b, c, d определена с точностью до одновременного умножения на ненулевую константу, группа автоморфизмов получается трёхмерной.

К сведению. Если область U достаточно хорошая, её конформное отображение в диск непрерывно продолжается на границу. Далее, "доворачивая" получившееся отображение автоморфизмом диска, можно перевести любые три точки на границе U в любые три точки на границе D_1.

Конформные отображения очень полезны при решении задачи Дирихле в области. А именно:

К сведению. Пусть отображение $f : U \to D$ — конформная биекция областей, и задана функция $F : D \to \mathbb{R}$. Тогда функция F на D гармонична тогда и только тогда, когда гармонична функция $F \circ f$ на U.

Соответственно, чтобы решить задачу Дирихле

$$\begin{cases} \Delta F = 0 \quad \text{в } U, \\ F|_{\partial U} = \varphi \end{cases}$$

в области U с функцией φ в качестве граничного условия, нужно эту область конформно перевести в единичный круг (а там это делается легко), решить задачу там, и принести ответ обратно.

17. Переведите конформно в круг (или в верхнюю полуплоскость) следующие области:

- Первый квадрант $\{x + iy \mid x, y > 0\}$.
- Плоскость без положительной полуоси $\{z \mid z \notin [0, +\infty)\}$.
- Верхнюю полуплоскость с разрезом $\{z \mid Im\, z > 0,\ z \notin [0, i]\}$.

К сведению. На самом деле, как мы уже видели, конформные преобразования в размерности 2 "дружат" с оператором Лапласа, а тот, в свою очередь, с броуновским движением. Поэтому (в определённом смысле!) верно следующее: *в размерности 2 конформные преобразования переводят траектории броуновского движения в траектории броуновского движения.*