Последовательности, близкие к периодическим.
Занятие 1

Некоторые используемые обозначения:
$\{\cdot\}$ — дробная часть числа,
$[\cdot] = \lfloor \cdot \rfloor$ — целая часть числа,
$\lceil \cdot \rceil$ — потолок числа, то есть ближайшее сверху целое число,
$\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n}$, то есть композиция функции f с самой собой n раз, обозначается $f^{\circ n}$,
F_u — множество подслов последовательности u,
$F_u(n)$ — множество подслов длины n последовательности u,
$p_u(n) = |F_u(n)|$ — подсловная сложность последовательности u,
$\log x$ — двоичный логарифм $\log_2 x$,
$\operatorname{sign} x$ — знак числа,
$\pi(\cdot)$ — наклон двоичного слова, то есть доля единиц.

Рассмотрим последовательность $a_n = \{nx\}$, где x — фиксированное иррациональное число.

1. а) Докажите, что в ней есть сколь угодно малые значения.
б) Докажите, что эта последовательность всюду плотна на $[0; 1)$, то есть на любом интервале, вложенном в этот полуинтервал, есть точка последовательности.
в) Докажите, что степень двойки может начинаться с любой последовательности цифр (начинающейся не с нуля).

2. Докажите, что для любого числа $\varepsilon > 0$ любая конечная подпоследовательность $(a_k, \dots, a_{k+l})$ бесконечно много раз повторяется в a_n с точностью ε (то есть для каких-то позиций $r_1, \dots, r_i, \dots$ верно, что $\forall i\ \forall 1 < j \leqslant l \quad |a_{k+j} - a_{r_i+j}| < \varepsilon$).

Определение 3. Последовательность u_n называется *периодической*, если для некоторого T (называемого *периодом*) имеем $u_{i+T} = u_i$ для всех i. Последовательность *заключительно периодическая*, если она периодическая с некоторого места.

Класс периодических последовательностей обозначим $\mathcal{P}$, заключительно периодических — $\mathcal{EP}$ (eventually periodic).

Определение 4. Последовательность символов из конечного алфавита называется *обобщённо почти периодической*, если существует такая функция $l(n)$, что любое слово длины n либо не встречается в последовательности нигде правее $l(n)$-го места, либо встречается в каждом её отрезке длины $l(n)$. Обобщённо почти периодическая последовательность называется *почти периодической*, если каждое слово, входящее в неё, встречается в ней бесконечно много раз. Минимальная $l(\cdot)$, удовлетворяющая этому определению, называется *регулятором почти периодичности*. Последовательность называется *заключительно почти периодической*, если при отрезании от неё некоторого префикса она становится почти периодической.

Класс обобщённо почти периодических последовательностей обозначим $\mathcal{GAP}$ (generalized almost periodic), почти периодических — $\mathcal{AP}$ (almost periodic), заключительно почти периодических — $\mathcal{EAP}$ (eventually almost periodic).

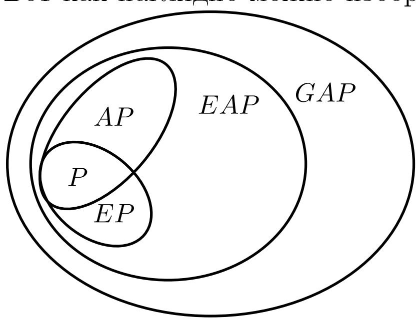
5. Докажите, что регулятор — неубывающая функция.

Разобьём интервал $[0; 1)$ на два точкой α, такой что $\alpha \notin \{\{nx\} \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Обозначим через $g(t)$ функцию, равную нулю на $[\alpha; 1)$ и единице на $[0; \alpha)$ (индикатор множества $[0; \alpha)$).

6. а) Докажите, что последовательность $g(a_n)$ почти периодична.
б) Докажите, что последовательность $\operatorname{sign}(\sin(n))$ почти периодична.
в) Докажите, что последовательность “первая цифра числа e^n” почти периодична.

7. а) Докажите, что выполнено $\mathcal{P} \subset \mathcal{AP} \subset \mathcal{EAP} \subset \mathcal{GAP}$.
б) Докажите, что все включения пункта а) строгие.
в) Докажите, что выполнено $\mathcal{P} \subset \mathcal{EP} \subset \mathcal{AP}$, и все включения здесь строгие.
г) Докажите равенство $\mathcal{AP} \cap \mathcal{EP} = \mathcal{P}$.

Вот как наглядно можно изобразить все рассмотренные классы:



Рассмотрим чуть более общую ситуацию, $b_n = \{nx + y\}$, и $\alpha \neq b_n$ даже при отрицательных n.

8. а) Докажите, что зная последовательность $g(b_n)$ можно восстановить x и y.
б) Докажите, что можно восстановить x и y с заданной точностью, спросив конечное (хотя и неизвестное заранее) количество элементов последовательности $g(b_n)$.

Рассмотрим b_n как двустороннюю последовательность, то есть будем рассматривать $n \in \mathbb{Z}$.

9. Докажите, что при фиксированном x существует бесконечно много различных даже с точностью до сдвига двусторонних последовательностей вида $g(\{nx + y\})$, но при этом каждый конечный отрезок любой из них бесконечно много раз встречается в любой другой.

Определение 10. Напишем символ 0. Теперь бесконечно много раз повторим такую операцию: к текущему конечному слову приписать его “отражение” — слово, полученное из него заменой 0 на 1 и 1 на 0. То есть дальше мы получим 01, потом 0110, затем 01101001, и т. д. Выписанная в конце концов бесконечная последовательность называется *последовательностью Туэ–Морса*. Она начинается так: 0110100110010110100101100110 1001…

11. а) Определим последовательность t_n рекурсивно: $t_0 = 0$, $t_{2n} = t_n$, $t_{2n+1} = \bar{t}_n$, где черта сверху обозначает операцию отражения: $\bar{0} = 1$ и $\bar{1} = 0$. Докажите, что t_n — это последовательность Туэ–Морса.
б) Пусть последовательность v_n определяется следующим образом: представим число n в двоичной записи, посчитаем сумму цифр и возьмём результат по модулю 2 — это и будет значение v_n. Докажите, что v_n совпадает с последовательностью Туэ–Морса.

12. Докажите, что последовательность Туэ–Морса почти периодична.

13. а) Докажите, что в последовательность Туэ–Морса не входит слово вида uuu ни для какого непустого u.
б) Докажите, что в последовательность Туэ–Морса не входит никакое слово вида $axaxa$, где a — символ, а x — произвольное слово.
в) Существует ли двоичная последовательность, в которую не входят квадраты, то есть слова вида uu?
г) Существует ли такая троичная последовательность?

14. Пусть $f(t) = 1 - 2|x - 0{,}5|$, а $g(\cdot)$ — индикатор полуинтервала $[0; 0{,}5)$. Всегда ли последовательность $g(f^{\circ n}(x))$ будет почти периодична?

15. Рассмотрим последовательность $\operatorname{sign}(\sin(n + \frac{[\ln n]}{[\ln \ln n]}))$. Является ли она обобщённо почти периодической? Заключительно почти периодической?

16. Докажите, что p_u — неубывающая функция.

17. а) Докажите, что последовательность заключительно периодична тогда и только

тогда, когда её подсловная сложность ограничена.
б) Докажите, что если у двоичной последовательности при каком-то n выполняется неравенство $p_u(n) \leqslant n$, то она заключительно периодична.
Указание. Рассмотрите "специальные слова" — подслова, после которых в последовательности может идти любая из двух цифр.

18. а) Докажите для любых чисел m, n и последовательности u: $p_u(m+n) \leqslant p_u(m)p_u(n)$.
б) Докажите, что для любой последовательности u существует число $E_u = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\log p_u(n)}{n}$, называемое её *энтропией.*
в) Докажите, что $0 \leqslant E_u \leqslant \log k$ для любой последовательности u над алфавитом из k символов.

Определение 19. Будем говорить, что функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ иногда намного больше, чем $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, если существует последовательность натуральных чисел n_i, такая что $\frac{f(n_i)}{g(n_i)} \to \infty$.

20. а) Постройте две последовательности, каждая из которых иногда намного больше другой.
б) Постройте не почти периодическую последовательность, у которой подсловная сложность иногда намного меньше, чем у некоторой почти периодической.
в) Постройте не обобщённо почти периодическую последовательность, у которой подсловная сложность линейна.
г) Постройте почти периодическую последовательность, у которой подсловная сложность иногда намного больше n^{100}.
д) Пусть дана последовательность натуральных чисел a_n, $n^2 < a_n < n^{1000}$. Постройте почти периодическую последовательность, у которой подсловная сложность иногда намного больше a_n и одновременно иногда намного меньше a_n.

21. (Определение энтропии E_u см. в задаче 18).
а) Докажите, что $E_u < 1$ для любой обобщённо почти периодической u.
б) Докажите, что для любого $\beta < 1$ найдётся почти периодическая u, такая что $E_u > \beta$.
в*) Докажите, что для любого $0 < \beta < 1$ существует последовательность u, такая что $E_u = \beta$. Можно ли выбрать такую последовательность почти периодической?

Определение 22. Последовательностью Штурма называется двоичная последовательность, у которой подсловная сложность $p_u(n) = n + 1$.

23. Докажите, что все последовательности Штурма заключительно почти периодичны.

Определение 24. Подслово в последовательности называется консервативным, если после него в последовательности всегда идёт одна и та же цифра.

25. Докажите, что если в последовательности есть подслово длины $2n$, у которого все подслова длины n консервативны, то последовательность заключительно периодична.

Определение 26. Последовательность называется сбалансированной, если количество единиц в любых двух её подсловах одинаковой длины отличается не более, чем на один.

27. а) Докажите, что подсловная сложность сбалансированной последовательности не больше, чем $n + 1$.
б) Докажите, что если последовательность не сбалансирована, то найдётся такой палиндром w, то найдётся такой палиндром, что $0w0$ и $1w1$ входят в последовательность.
в) Докажите, что последовательность является последовательностью Штурма тогда и только тогда когда она непериодической и сбалансирована.

Определение 28. *Наклоном* двоичного слова w называется доля единиц в нём. Обозначение: $\pi(w)$.

29. а) Докажите, что последовательность сбалансирована, тогда и только тогда когда для любых двух её подслов x и y выполнено $\pi(x) = \pi(y) < \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|}$.

б) Докажите, что для сбалансированной последовательности существует предел наклона префикса при стремлении длины префикса к бесконечности. Он называется *наклоном последовательности.*

в) Докажите, что для сбалансированной последовательности с наклоном α для любого подслова u выполнено $\pi(u) - \alpha < \frac{1}{|u|}$. г) Докажите, что наклон сбалансированной последовательности рационален тогда и только тогда, когда последовательность заключительно периодична.

Определение 30. *Механическими последовательностями* с параметрами α, ρ называются последовательности $\lfloor \alpha(n+1) + \rho \rfloor - \lfloor \alpha(n) + \rho \rfloor$ (нижняя) и $\lceil \alpha(n+1) + \rho \rceil - \lceil \alpha(n) + \rho \rceil$ (верхняя).

31. Верно ли, что всякая верхняя механическая последовательность является нижней для того же α и другого ρ.

Определение 32. Последовательности называются существенно различными, если они остаются различными после удаления любых префиксов.

33. Докажите, что при данном α существует бесконечно много существенно различных механических последовательностей, различающихся только ρ.

34. Докажите, что всякая механическая последовательность сбалансирована.

35. Докажите, что последовательность является последовательностью Штурма тогда и только тогда, когда она является механической с иррациональным наклоном.

36. Является ли последовательность Туэ–Морса последовательностью Штурма?