

## Последовательности, близкие к периодическим.

### Занятие 2

**Определение 1.** Блочное произведение двух слов из нулей и единиц задаётся соотношениями:  $a \otimes 0 = a$ ,  $a \otimes 1 = \bar{a}$  (отражение  $a$ ),  $a \otimes uv = (a \otimes u)(a \otimes v)$ . Другими словами, во втором сомножителе заменяем 0 на первый сомножитель, а 1 — на его отражение.

2. Ассоциативно ли блочное произведение? Коммутативно ли?

3. Определите бесконечное блочное произведение слов из нулей и единиц, начинающихся с нулей. Докажите, что оно почти периодично.

4. Любая ли почти периодическая последовательность может быть получена как блочное произведение?

5. Найдите 5, 5047 и 4473 символ блочного произведения  $01 \otimes 011 \otimes 0101 \otimes 00110 \otimes 010010 \otimes 0010001 \otimes 01101001 \otimes 000111000$ . (На все три вопроса можно ответить, пользуясь только ручкой и одним тетрадным листом.)

6. а) Представьте последовательность Туэ-Морса в виде блочного произведения.

б) Оцените подсловную сложность последовательности Туэ-Морса.

**Определение 7.** Декартовым произведением двух последовательностей  $x, y$  символов конечных алфавитов  $A, B$  называется последовательность  $x \times y$  символов алфавита  $A \times B$ , такая что  $(x \times y)_k = x_k \times y_k$ .

8. а) Докажите, что декартово произведение последовательностей  $x, y \in \mathcal{P}$  периодично.

б) Докажите, что декартово произведение  $x \in \mathcal{P}$  и  $y \in \mathcal{AP}$  почти периодично.

9. Пусть  $x, y \in \mathcal{AP}$ .

а) Может ли быть так, что  $x \times y \in \mathcal{EAP} \setminus \mathcal{AP}$ ?

б) Может ли быть так, что  $x \times y \in \mathcal{GAP} \setminus \mathcal{EAP}$ ?

в) Может ли быть так, что  $x \times y \notin \mathcal{GAP}$ ?

**Определение 10.** Рассмотрим конечные множества  $A, B$  и назовём их *входным* и *выходным* алфавитом, соответственно. Рассмотрим конечное множество  $Q$  и назовём его *множеством состояний*. *Конечным автоматом* называется набор из отображений  $S: Q \times A \rightarrow Q, O: Q \times A \rightarrow B$  и *начального состояния*  $q_0 \in Q$ . Смысл: сначала автомат находится в состоянии  $q_0$ , потом ему на вход подаются по одному символы из входного алфавита,  $S$  по старому состоянию и поступившему символу выдаёт новое состояние, а  $O$  — символ, подаваемый на выход. Пример: пусть  $A = B = Q = \{0, 1\}$ ,  $q_0 = 0$ , и пусть  $S(s, q) = O(s, q) = s + q \pmod{2}$ . Тогда этот автомат на каждом шаге выдаёт на выход сумму всего поданного на вход к этому моменту по модулю два.

11. Постройте конечный автомат, осуществляющий сложение в столбик в двоичной системе счисления — на вход подаются пары цифр одна над другой (предполагается, что так подаются складываемые числа, причём с конца), а на выход должны выдаваться цифры суммы. Можно ли построить такой автомат для сложения в десятичной системе счисления? А в унарной (число  $n$  записывается как слово из  $n$  единиц)?

12. Можно ли построить конечный автомат, умножающий числа в двоичной системе счисления, если числа подаются на вход так же, как в предыдущей задаче?

13. Сколько существует различных конечных автоматов с двумя состояниями и двоичными входным и выходным алфавитами? Сколько из них, начиная из первого состояния, хотя бы при одном входе хоть раз выводят 1? Сколько существует различных конечных автоматов с тремя состояниями и двоичными входным и выходным алфавитами?

14. а) Постройте конечный автомат со входным и выходным алфавитом  $\{0, 1\}$ , который выдаёт 0 до того момента, пока среди поданных на вход символов не встретится слово из символов 01100, идущих подряд, и выдавать 1 после этого?

б) Докажите, что конечный автомат со входным алфавитом  $\{(, )\}$  и выходным алфавитом  $\{0, 1\}$  не может выдавать 1, пока число поданных на вход закрывающих скобок не

больше числа открывающих и выдавать всегда 0 после того, как хотя бы один раз число закрывающих скобок превысит число открывающих.

**15.** Рассмотрим периодическую последовательность с периодом 7 и конечный автомат с 5 состояниями.

- а) Докажите, что образ последовательности при соответствующем автоматном преобразовании заключительно периодичен.
- б) Оцените сверху период и предпериод.
- в) Может ли каждая из этих оценок достигаться?
- г) Могут ли они достигаться одновременно?
- д) Какие пары периода и предпериода возможны?

**16.** а) Докажите, что выход конечного автомата при подаче на вход последовательности из  $\mathcal{GAP}$  лежит в  $\mathcal{GAP}$

б) Докажите, что выход конечного автомата при подаче на вход последовательности из  $\mathcal{EAP}$  лежит в  $\mathcal{EAP}$ .