

Последовательности, близкие к периодическим. Занятие 3

Определение 1. Пусть дан автомат со входным алфавитом $\{0, \dots, k-1\}$, в состояниях которого написаны буквы некоторого конечного алфавита A . Последовательность x строится следующим образом: автомат получает на вход число n , записанное в системе счисления с основанием k , обработав которое, останавливается в состоянии q ; написанная в нём буква алфавита A — это и есть символ x_n последовательности. Последовательности, получаемые таким образом, называются *k-автоматными*. *Автоматной* называют последовательность, *k-автоматную* для какого-нибудь k .

2. а) Докажите, что последовательность 1-автоматна тогда и только тогда, когда она заключительно периодична.

б) Докажите, что заключительно периодическая последовательность k -автоматна для любого k .

3*. а) Докажите, что если последовательность отличается от автоматной не более чем в конечном количестве символов, то она автоматна.

б) Докажите, что после приписывания произвольного количества символов в начало автоматная последовательность остаётся автоматной.

в) Докажите, что класс k -автоматных последовательностей замкнут относительно автоматных преобразований.

4. Докажите, что последовательность Туэ-Морса — автоматная.

5. Докажите, что если x и y являются k -автоматными, то $x \times y$ также k -автоматна.

Определение 6. *Преобразование дракона* двоичного слова w с параметром в виде двоичного символа x — это конкатенация слова w , символа x , и слова \bar{w} , записанного в обратном порядке. Смысл такой: будем сгибать стоящую на ребре по направлению от нас бумажную полоску при параметре 0 влево, а при параметре 1 вправо. Потом мы все сгибы развернём до прямых углов. При разворачивании полоски на ней будет последовательность сгибов, которая является результатом применения соответствующих преобразований дракона к пустому слову.

7. а) Докажите, что если применять циклически некоторую последовательность преобразований дракона, то результат будет автоматной последовательностью.

б) Является ли полученная последовательность почти периодической?

в) Докажите, что если автоматная последовательность получена из пустого слова последовательностью преобразований дракона, то эта последовательность преобразований дракона заключительно периодична.

Определение 8. Числа k и l называются *мультипликативно независимыми*, если ни для каких p и q не верно $k^p = l^q$.

9. а) Докажите, что k -автоматная последовательность является k^n -автоматной для любого n .

б)* Докажите, что если последовательность k -автоматна и l -автоматна для мультипликативно независимых k и l , то она заключительно периодична.

Определение 10. *Морфизм* — это такое отображение $\phi: A \rightarrow B$ из одного конечного алфавита в другой, для которого выполнено $\phi(uv) = \phi(u)\phi(v)$ для любых слов $u, v \in A^*$. Ясно, что морфизм полностью определяется своими значениями на однобуквенных словах. Морфизм называется *нестирающим*, если образы всех букв непусты. Морфизм *k-равномерный*, если образы всех букв имеют длину k . 1-равномерный морфизм мы называем *кодированием*.

11. а) Докажите, что периодические последовательности под действием морфизмов переходят в периодические.

- б) Докажите, что почти периодические последовательности под действием морфизмов переходят в почти периодические.
- в) Докажите, что обобщённо почти периодические последовательности под действием морфизмов переходят в обобщённо почти периодические.
- г) Как изменяется регулятор при морфизме?

12. Постройте две почти периодические последовательности, ни одну из которых нельзя перевести в другую морфизмом.

13. Постройте две почти периодические последовательности, такие что первую можно перевести морфизмом во вторую, но вторую нельзя перевести морфизмом в первую.

Определение 14. Пусть образ морфизма ϕ на букве s начинается с s . Тогда в последовательности слов $s, \phi(s), \phi^2(s), \phi^3(s), \dots$ каждое следующее слово начинается с предыдущего. Если длины этих слов неограниченно растут, то естественным образом можно построить бесконечную последовательность $\phi^\infty(s)$ как предел слов $\phi^n(s)$ (другими словами, каждое из слов $\phi^n(s)$ является префиксом последовательности $\phi^\infty(s)$). Последовательности, которые можно так построить, называются *чисто морфическими*. Образы чисто морфических последовательностей при кодированиях называются *морфическими*.

15. а) Докажите, что последовательность Фибоначчи $01001010010010100101001001\dots$, являющаяся неподвижной точкой морфизма $0 \rightarrow 01, 1 \rightarrow 0$, почти периодична.

б) Докажите, что последовательность Фибоначчи является последовательностью Штурма.

в) Является ли она автоматной?

16. Докажите, что последовательность Туэ-Морса чисто морфическая.

17. Докажите, что k -автоматные последовательности — это в точности морфические последовательности, полученные из k -равномерных морфизмов.

18. а) Докажите, что образ чисто морфической последовательности под действием морфизма морфичен.

б)* Докажите, что образ морфической последовательности под действием конечного автомата морфичен.

19. а) Докажите, что подсловная сложность морфической последовательности не больше $O(n^2)$.

б)* Докажите, что подсловная сложность чисто морфической последовательности может быть одного из следующих пяти типов: $O(1), \Theta(n), \Theta(n \log n), \Theta(n \log \log n), \Theta(n^2)$.

в**) Какой может быть подсловная сложность морфической последовательности?

г) А если последовательность одновременно чисто морфическая и почти периодическая? Или одновременно морфическая и почти периодическая?

20.** Существует ли алгоритм определения по двум морфическим последовательностям (точнее, по их конечным описаниям) того, являются ли они равными?

21. Для каждой пары из следующих классов последовательностей постройте последовательность, принадлежащую одному из них, но не принадлежащую другому (если это возможно): автоматные, морфические, почти периодические, последовательности Штурма.

Определение 22. Последовательность Колакоски начинается следующим образом: $2211212212211211221211221121122112112212211212212112\dots$

а) Попытайтесь угадать, как она строится.

б)** Существует ли для неё предел доли единиц в префиксе при длине префикса, стремящейся к бесконечности? Докажите, что если он существует, то равен $\frac{1}{2}$.

в)** Верно ли, что всякое слово, которое в ней встречается, встречается в ней хотя бы ещё раз.

г)* Докажите, что она не является чисто морфической.

д)** Является ли она морфической?