Последовательности, близкие к периодическим.
Занятие 4

Определение 1. Пусть p — это разреженное слово в конечном алфавите A, то есть слово из букв алфавита A, в котором на некоторых местах разрешены пропуски, обозначаемые $\square$. Примеры: $ab\square a\square$, $a\square b$, $a\square$. По разреженному слову u можно построить последовательность следующим образом: запишем периодически слово u: $uuuu\dots$. В оставшиеся пропуски (то есть в последовательность, образованную значками $\square$) мы опять впишем последовательность $uuuu\dots$, после чего с оставшимися пропусками сделаем то же самое, и так далее до бесконечности. Полученное бесконечное слово называется *словом Тёплица* и обозначается T_u.

Например, последовательность $T_{a\square b}$ строится следующим образом: сначала записываем $a\square ba\square ba\square ba\square ba\square ba\square ba\square ba\square ba\square b\dots$, после следующего шага $aaba\square babbaaba\square babbaaba\square babb\dots$, потом $aabaababbaaba\square babbaababbabb\dots$, и так далее. Другие примеры: $T_{a\square} = aaaaaaaa\dots = a^\infty$, $T_{ab\square a\square} = abaababaaaabbaaabbaaabaaaabaababbaaabaaaabbababaaa\dots$

2. Докажите, что слово Тёплица всегда почти периодично.

3. а) Докажите, что если в слове u один пропуск, то T_u чисто морфическая.
б) Докажите, что если количество пропусков в слове u делит его длину, то последовательность T_u морфическая.

4*. Найдите подсловную сложность слова Тёплица. (Указание: она зависит только от количества пропусков и длины порождающего слова, если только результат не периодический.)

Определение 5. Последовательность называется *квазипериодической* с *квазипериодом* u, если её можно целиком покрыть (возможно, перекрывающимися) вхождениями слова u. Пример: последовательность $abaababababaabaabaabaababababababa\dots$ квазипериодична с квазипериодом aba. Последовательность называется *сильно квазипериодической*, если у неё найдётся бесконечное множество квазипериодов.

6. Докажите, что сильно квазипериодическая последовательность почти периодична.

Определение 7. Мы говорим, что частота вхождения символа a в последовательность x равна α, если $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|x[0, n-1]|_a}{n} = \alpha$, где $x[0, n-1]$ — префикс длины n последовательности x, а $|u|_a$ — количество вхождений символа a в слово u.

8. а) Докажите, что в заключительно периодической последовательности существует частота вхождения для любого символа.
б) Верно ли, что в каждой почти периодической последовательности существует частота вхождений любого символа?
в) Верно ли это для квазипериодических последовательностей?
г) А для слов Тёплица?

9. Для каждой пары из следующих классов последовательностей постройте последовательность, принадлежащую одному из них, но не принадлежащую другому (если это возможно): автоматные, морфические, почти периодические, слова Тёплица, квазипериодические последовательности, сильно квазипериодические последовательности.

Определение 10. (См. определение 22 из листка 3.) Последовательность Колакоски начинается следующим образом: 2211212212211211221211212211211212212211 2... Определяется она следующим образом. Рассмотрим преобразование, которое переводит последовательность $a_1a_2a_3\dots$ из чисел 1 и 2 в последовательность, в которой идёт a_1 двоек, a_2 единиц, a_3 двоек, a_4 единиц, и так далее, попеременно. Последовательность Колакоски — это неподвижная точка этого преобразования.