Последовательности, близкие к периодическим

Задачи к занятиям

Юрий Притыкин, Михаил Раскин

Летняя школа “Современная математика”, Дубна, 19–30 июля 2007 г.

Некоторые используемые обозначения:
$\{\cdot\}$ — дробная часть числа,
$[\cdot] = \lfloor\cdot\rfloor$ — целая часть числа,
$\lceil\cdot\rceil$ — потолок числа, то есть ближайшее сверху целое число,
F_x — множество подслов последовательности x,
$F_x(n)$ — множество подслов длины n последовательности x,
$p_x(n) = |F_x(n)|$ — подсловная сложность последовательности x,
$\log t$ — двоичный логарифм $\log_2 t$,
$\operatorname{sign} t$ — знак числа,
$\pi(\cdot)$ — наклон двоичного слова, то есть доля единиц,
T_u — слово Тёплица, построенное из разреженного слова u.

Занятие 1

Рассмотрим последовательность $a_n = \{nx\}$, где x — фиксированное иррациональное число.

1.1. а) Докажите, что в ней есть сколь угодно малые значения.
б) Докажите, что эта последовательность всюду плотна на $[0;1)$, то есть на любом интервале, вложенном в этот полуинтервал, есть точка последовательности.
в) Докажите, что степень двойки может начинаться с любой последовательности цифр (начинающейся не с нуля).

1.2. Докажите, что для любого числа $\varepsilon > 0$ любая конечная подпоследовательность $(a_k, \ldots, a_{k+l})$ бесконечно много раз повторяется в a_n с точностью ε (то есть для каких-то позиций $r_1, \ldots, r_i, \ldots$ верно, что $\forall i\ \forall 1 < j \leqslant l \quad |a_{k+j} - a_{r_i+j}| < \varepsilon$).

Определение 1.3. Последовательность u_n называется *периодической*, если для некоторого T (называемого *периодом*) имеем $u_{i+T} = u_i$ для всех i. Последовательность *заключительно периодическая*, если она периодическая с некоторого места.

Класс периодических последовательностей обозначим $\mathcal{P}$, заключительно периодических — $\mathcal{EP}$ (eventually periodic).

Определение 1.4. Последовательность символов из конечного алфавита называется *обобщённо почти периодической*, если существует такая функция $l(n)$, что любое слово длины n либо не встречается в последовательности нигде правее $l(n)$-го места, либо встречается в каждом её отрезке длины $l(n)$. Обобщённо почти периодическая последовательность называется *почти периодической*, если каждое слово, входящее в неё, встречается в ней бесконечно много раз. Минимальная $l(\cdot)$, удовлетворяющая этому определению, называется *регулятором почти периодичности*. Последовательность называется *заключительно почти периодической*, если при отрезании от неё некоторого префикса она становится почти периодической.

Класс обобщённо почти периодических последовательностей обозначим $\mathcal{GAP}$ (generalized almost periodic), почти периодических — $\mathcal{AP}$ (almost periodic), заключительно почти периодических — $\mathcal{EAP}$ (eventually almost periodic).

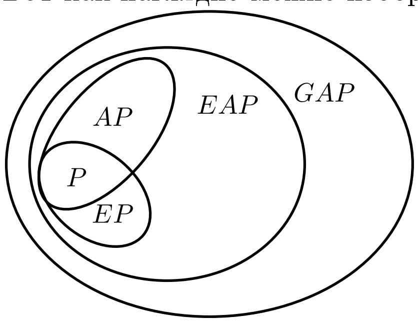
1.5. Докажите, что регулятор — неубывающая функция.

Разобьём интервал $[0;1)$ на два точкой α, такой что $\alpha \notin \{\{nx\} \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Обозначим через $g(t)$ функцию, равную нулю на $[\alpha;1)$ и единице на $[0;\alpha)$ (индикатор множества $[0;\alpha)$).

1.6. а) Докажите, что последовательность $g(a_n)$ почти периодична.
б) Докажите, что последовательность $\mathrm{sign}(\sin(n))$ почти периодична.
в) Докажите, что последовательность “первая цифра числа e^n” почти периодична.

1.7. а) Докажите, что выполнено $\mathcal{P} \subset \mathcal{AP} \subset \mathcal{EAP} \subset \mathcal{GAP}$.
б) Докажите, что все включения пункта а) строгие.
в) Докажите, что выполнено $\mathcal{P} \subset \mathcal{EP} \subset \mathcal{AP}$, и все включения здесь строгие.
г) Докажите равенство $\mathcal{AP} \cap \mathcal{EP} = \mathcal{P}$.

Вот как наглядно можно изобразить все рассмотренные классы:



Рассмотрим чуть более общую ситуацию: $b_n = \{nx + y\}$, и $\alpha \neq b_n$ (α из определения g) даже при отрицательных n.

1.8. а) Докажите, что зная последовательность $g(b_n)$ можно восстановить x и y.
б) Докажите, что можно восстановить x и y с заданной точностью, спросив конечное (хотя и неизвестное заранее) количество элементов последовательности $g(b_n)$.

1.9. Докажите, что при фиксированном x существует бесконечно много различных даже с точностью до сдвига двусторонних последовательностей вида $g(\{nx + y\})$, $n \in \mathbb{Z}$, но при этом каждый конечный отрезок любой из них бесконечно много раз встречается в любой другой.

Определение 1.10. Напишем символ 0. Теперь бесконечно много раз повторим такую операцию: к текущему конечному слову приписать его “отражение” — слово, полученное из него заменой 0 на 1 и 1 на 0. То есть дальше мы получим 01, потом 0110, затем 01101001, и т. д. Выписанная в конце концов бесконечная последовательность называется *последовательностью Туэ–Морса.* Она начинается так: 01101001100101101001011001101001...

1.11. а) Определим последовательность t_n рекурсивно: $t_0 = 0$, $t_{2n} = t_n$, $t_{2n+1} = \bar{t}_n$, где черта сверху обозначает операцию отражения: $\bar{0} = 1$ и $\bar{1} = 0$. Докажите, что t_n — это последовательность Туэ–Морса.
б) Пусть последовательность v_n определяется следующим образом: представим число n в двоичной записи, посчитаем сумму цифр и возьмём результат по модулю 2 — это и будет значение v_n. Докажите, что v_n совпадает с последовательностью Туэ–Морса.

1.12. Докажите, что последовательность Туэ–Морса почти периодична.

1.13. а) Докажите, что в последовательность Туэ–Морса не входит слово вида uuu ни для какого непустого u.
б) Докажите, что в последовательность Туэ–Морса не входит никакое слово вида $axaxa$, где a — символ, а x — произвольное слово.

в) Существует ли двоичная последовательность, в которую не входят квадраты, то есть слова вида uu?
г) Существует ли такая троичная последовательность?

1.14. Пусть $f(x) = 1 - 2|x - 0{,}5|$, а $g(\cdot)$ — индикатор полуинтервала $[0; 0{,}5)$. Всегда ли последовательность $x_n = g(f(f(\ldots(f(x))\ldots)))$ (n применений функции f) будет почти периодична?

1.15. Рассмотрим последовательность $\operatorname{sign}(\sin(n + \frac{[\ln n]}{[\ln \ln n]}))$. Является ли она обобщённо почти периодической? Заключительно почти периодической?

Определение 1.16. *Подсловной сложностью* последовательности x называется функция, сопоставляющая числу n количество слов длины n, которые входят в x. Обозначение: p_x.

1.17. Докажите, что p_x — неубывающая функция.

Определение 1.18. Подслово в последовательности называется *консервативным*, если после него в последовательности всегда идёт один и тот же символ. Подслово называется *специальным*, если после него в последовательности может идти любой из символов.

1.19. а) Докажите, что если в последовательности есть подслово длины $2n$, у которого все подслова длины n консервативны, то последовательность заключительно периодична.
б) Докажите, что последовательность заключительно периодична тогда и только тогда, когда её подсловная сложность ограничена.
в) Докажите, что если для двоичной последовательности x при каком-то n выполняется неравенство $p_x(n) \leqslant n$, то она заключительно периодична.

1.20. а) Докажите для любых чисел m, n и последовательности x: $p_x(m+n) \leqslant p_x(m)p_x(n)$.
б) Докажите, что для любой последовательности x существует число $E_x = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\log p_x(n)}{n}$, называемое её *энтропией*.
в) Докажите, что $0 \leqslant E_x \leqslant \log k$ для любой последовательности x над алфавитом из k символов.

Определение 1.21. Будем говорить, что функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ иногда намного больше, чем $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, если существует последовательность натуральных чисел n_i, такая что $\frac{f(n_i)}{g(n_i)} \to \infty$.

1.22. а) Постройте две последовательности, каждая из которых иногда намного больше другой.
б) Постройте не почти периодическую последовательность, у которой подсловная сложность иногда намного меньше, чем у некоторой почти периодической.
в) Постройте не обобщённо почти периодическую последовательность, у которой подсловная сложность линейна.
г) Постройте почти периодическую последовательность, у которой подсловная сложность иногда намного больше n^{100}.
д) Пусть дана последовательность натуральных чисел a_n, $n^2 < a_n < n^{1000}$. Постройте почти периодическую последовательность, у которой подсловная сложность иногда намного больше a_n и одновременно иногда намного меньше a_n.

1.23. (Определение энтропии E_x см. в задаче 1.20).
а) Докажите, что $E_x < 1$ для любой обобщённо почти периодической x.
б) Докажите, что для любого $\beta < 1$ найдётся почти периодическая x, такая что $E_x > \beta$.
в)* Докажите, что для любого $0 < \beta < 1$ существует последовательность x, такая что $E_x = \beta$. Можно ли выбрать такую последовательность почти периодической?

Определение 1.24. *Последовательностью Штурма* называется (двоичная) последовательность x, у которой подсловная сложность $p_x(n) = n + 1$.

Определение 1.25. Двоичная последовательность называется *сбалансированной*, если количество единиц в любых двух её подсловах одинаковой длины отличается не более, чем на один.

1.26. а) Докажите, что подсловная сложность сбалансированной последовательности не больше, чем $n+1$.
б) Докажите, что если последовательность не сбалансирована, то найдётся такой палиндром w, что $0w0$ и $1w1$ входят в последовательность.
в) Докажите, что последовательность является последовательностью Штурма тогда и только тогда когда она непериодическая и сбалансированная.

Определение 1.27. *Наклоном* двоичного слова w называется доля единиц в нём. Обозначение: $\pi(w)$.

1.28. а) Докажите, что последовательность сбалансирована, тогда и только тогда когда для любых двух её подслов x и y выполнено $|\pi(x)-\pi(y)| < \frac{1}{|x|}+\frac{1}{|y|}$.
б) Докажите, что для сбалансированной последовательности существует предел наклона префикса при стремлении длины префикса к бесконечности. Он называется *наклоном последовательности.*
в) Докажите, что для сбалансированной последовательности с наклоном α для любого подслова u выполнено $|\pi(u)-\alpha| < \frac{1}{|u|}$.
г) Докажите, что наклон сбалансированной последовательности рационален тогда и только тогда, когда последовательность заключительно периодична.

Определение 1.29. *Нижней* и *верхней механическими последовательностями* с параметрами α, ρ называются последовательности $\lfloor\alpha(n+1)+\rho\rfloor-\lfloor\alpha(n)+\rho\rfloor$ и $\lceil\alpha(n+1)+\rho\rceil-\lceil\alpha(n)+\rho\rceil$ соответственно.

1.30. Верно ли, что всякая верхняя механическая последовательность является нижней (возможно, с другими параметрами)?

Определение 1.31. Последовательности называются *существенно различными*, если они остаются различными после удаления любых префиксов.

1.32. Докажите, что при данном α существует бесконечно много существенно различных механических последовательностей, различающихся только параметром ρ.

1.33. Докажите, что всякая механическая последовательность сбалансирована.

1.34. Докажите, что последовательность является последовательностью Штурма тогда и только тогда, когда она является механической с иррациональным наклоном.

1.35. Докажите, что все последовательности Штурма почти периодичны.

1.36. Является ли последовательность Туэ–Морса последовательностью Штурма?

Занятие 2

Определение 2.1. Блочное произведение двух слов из нулей и единиц задаётся соотношениями: $a\otimes 0 = a$, $a\otimes 1=\overline{a}$ (отражение a), $a\otimes uv = (a\otimes u)(a\otimes v)$. Другими словами, во втором сомножителе заменяем 0 на первый сомножитель, а 1 — на его отражение.

2.2. Ассоциативно ли блочное произведение? Коммутативно ли?

2.3. Определите бесконечное блочное произведение слов из нулей и единиц, начинающихся с нулей. Докажите, что оно почти периодично.

2.4. Любая ли почти периодическая последовательность может быть получена как блочное произведение?

2.5. Найдите 5, 5047 и 4473 символ блочного произведения $01\otimes 011\otimes 0101\otimes 00110\otimes 010010\otimes 0010001\otimes 01101001\otimes 000111000$. (На все три вопроса можно ответить, пользуясь только ручкой и одним тетрадным листом.)

2.6. а) Представьте последовательность Туэ–Морса в виде блочного произведения.
б) Оцените подсловную сложность последовательности Туэ–Морса.

Определение 2.7. *Декартовым произведением* двух последовательностей x, y символов конечных алфавитов A, B называется последовательность $x \times y$ символов алфавита $A \times B$, такая что $(x \times y)_k = x_k \times y_k$.

2.8. а) Докажите, что декартово произведение последовательностей $x, y \in \mathcal{P}$ периодично.
б) Докажите, что декартово произведение $x \in \mathcal{P}$ и $y \in \mathcal{AP}$ почти периодично.

2.9. Пусть $x, y \in \mathcal{AP}$.
а) Может ли быть так, что $x \times y \in \mathcal{EAP} \setminus \mathcal{AP}$?
б) Может ли быть так, что $x \times y \in \mathcal{GAP} \setminus \mathcal{EAP}$?
в) Может ли быть так, что $x \times y \notin \mathcal{GAP}$?

Определение 2.10. Пусть A, B — конечные множества, называемые соответственно *входной* и *выходной* алфавит, Q — конечное *множество состояний. Конечным автоматом* называется набор из отображений $S\colon Q \times A \to Q$, $O\colon Q \times A \to B$ и *начального состояния* $q_0 \in Q$. Смысл: сначала автомат находится в состоянии q_0, потом ему на вход подаются по одному символы из входного алфавита, S по старому состоянию и поступившему символу выдаёт новое состояние, а O — символ, подаваемый на выход. Пример: пусть $A = B = Q = \{0, 1\}$, $q_0 = 0$, и пусть $S(s, q) = O(s, q) = s + q \pmod 2$. Тогда этот автомат на каждом шаге выдаёт на выход сумму всего поданного на вход к этому моменту по модулю два.

2.11. Постройте конечный автомат, осуществляющий сложение в столбик в двоичной системе счисления — на вход подаются пары цифр одна над другой (предполагается, что так подаются складываемые числа, причём с конца), а на выход должны выдаваться цифры суммы. Можно ли построить такой автомат для сложения в десятичной системе счисления? А в унарной (число n записывается как слово из n единиц, возможно, предваряемых произвольным количеством символов пробела)?

2.12. Можно ли построить конечный автомат, умножающий числа в двоичной системе счисления, если числа подаются на вход так же, как в предыдущей задаче?

2.13. Сколько существует различных конечных автоматов с двумя состояниями и двоичными входным и выходным алфавитами? Сколько из них, начиная из первого состояния, хотя бы при одном входе хоть раз выводят 1? Сколько существует различных конечных автоматов с тремя состояниями и двоичными входным и выходным алфавитами?

2.14. а) Постройте конечный автомат со входным и выходным алфавитом $\{0, 1\}$, который выдаёт 0 до того момента, пока среди поданных на вход символов не встретится слово из символов 01100, идущих подряд, и выдавать 1 после этого?
б) Докажите, что конечный автомат со входным алфавитом $\{(,)\}$ и выходным алфавитом $\{0, 1\}$ не может выдавать 1, пока число поданных на вход закрывающих скобок не больше числа открывающих и выдавать всегда 0 после того, как хотя бы один раз число закрывающих скобок превысит число открывающих.

2.15. Рассмотрим периодическую последовательность с периодом 7 и конечный автомат с 5 состояниями.
а) Докажите, что образ последовательности при соответствующем автоматном преобразовании заключительно периодичен.
б) Оцените сверху период и предпериод.
в) Может ли каждая из этих оценок достигаться?
г) Могут ли они достигаться одновременно?
д) Какие пары периода и предпериода возможны?

2.16. а) Докажите, что выход конечного автомата при подаче на вход последовательности из $\mathcal{GAP}$ лежит в $\mathcal{GAP}$
б) Докажите, что выход конечного автомата при подаче на вход последовательности из $\mathcal{EAP}$ лежит в $\mathcal{EAP}$.

Занятие 3

Определение 3.1. Пусть дан автомат со входным алфавитом $\{0, \ldots, k-1\}$, в состояниях которого написаны буквы некоторого конечного алфавита A. Последовательность x строится следующим образом: автомат получает на вход число n, записанное в системе счисления с основанием k, обработав которое, останавливается в состоянии q; написанная в нём буква алфавита A — это и есть символ x_n последовательности. Последовательности, получаемые таким образом, называются *k-автоматными*. *Автоматной* называют последовательность, k-автоматную для какого-нибудь k.

3.2. а) Докажите, что последовательность 1-автоматна тогда и только тогда, когда она заключительно периодична.
б) Докажите, что заключительно периодическая последовательность k-автоматна для любого k.

3.3*. а) Докажите, что если последовательность отличается от автоматной не более чем в конечном количестве символов, то она автоматна.
б) Докажите, что после приписывания произвольного количества символов в начало автоматная последовательность остаётся автоматной.
в) Докажите, что класс k-автоматных последовательностей замкнут относительно автоматных преобразований.

3.4. Докажите, что последовательность Туэ–Морса — автоматная.

3.5. Докажите, что если x и y являются k-автоматными, то $x \times y$ также k-автоматна.

Определение 3.6. *Преобразование дракона* двоичного слова w с параметром в виде двоичного символа x — это конкатенация слова w, символа x, и слова $\overline{w}$, записанного в обратном порядке. Смысл такой: будем сгибать стоящую на ребре по направлению от нас бумажную полоску при параметре 0 влево, а при параметре 1 вправо. Потом мы все сгибы развернём до прямых углов. При разворачивании полоски на ней будет последовательность сгибов, которая является результатом применения соответствующих преобразований дракона к пустому слову.

3.7. а) Докажите, что если применять циклически некоторую последовательность преобразований дракона, то результат будет автоматной последовательностью.
б) Является ли полученная последовательность почти периодической?
в) Докажите, что если автоматная последовательность получена из пустого слова последовательностью преобразований дракона, то эта последовательность преобразований дракона заключительно периодична.

Определение 3.8. Числа k и l называются *мультипликативно независимыми*, если ни для каких p и q не верно $k^p = l^q$.

3.9. а) Докажите, что k-автоматная последовательность является k^n-автоматной для любого n.
б)* Докажите, что если последовательность k-автоматна и l-автоматна для мультипликативно независимых k и l, то она заключительно периодична.

Определение 3.10. *Морфизм* — это такое отображение $\phi\colon A \to B$ из одного конечного алфавита в другой, для которого выполнено $\phi(uv) = \phi(u)\phi(v)$ для любых слов $u, v \in A^*$. Ясно, что морфизм полностью определяется своими значениями на однобуквенных словах. Морфизм называется *нестирающим*, если образы всех букв непусты. Морфизм *k-равномерный*, если образы всех букв имеют длину k. 1-равномерный морфизм мы называем *кодированием*.

3.11. а) Докажите, что периодические последовательности под действием морфизмов переходят в периодические.
б) Докажите, что почти периодические последовательности под действием морфизмов пере-

ходят в почти периодические.
в) Докажите, что обобщённо почти периодические последовательности под действием морфизмов переходят в обобщённо почти периодические.
г) Как изменяется регулятор при морфизме?

3.12. Постройте две почти периодические последовательности, ни одну из которых нельзя перевести в другую морфизмом.

3.13. Постройте две почти периодические последовательности, такие что первую можно перевести морфизмом во вторую, но вторую нельзя перевести морфизмом в первую.

Определение 3.14. Пусть образ морфизма ϕ на букве s начинается с s. Тогда в последовательности слов $s, \phi(s), \phi^2(s), \phi^3(s), \ldots$ каждое следующее слово начинается с предыдущего. Если длины этих слов неограниченно растут, то естественным образом можно построить бесконечную последовательность $\phi^\infty(s)$ как предел слов $\phi^n(s)$ (другими словами, каждое из слов $\phi^n(s)$ является префиксом последовательности $\phi^\infty(s)$). Последовательности, которые можно так построить, называются *чисто морфическими*. Образы чисто морфических последовательностей при кодированиях называются *морфическими*.

3.15. а) Докажите, что последовательность Фибоначчи $0100101001001010010100100 1\ldots$, являющаяся неподвижной точкой морфизма $0 \to 01$, $1 \to 0$, почти периодична.
б) Докажите, что последовательность Фибоначчи является последовательностью Штурма.
в) Является ли она автоматной?

3.16. Докажите, что последовательность Туэ–Морса чисто морфическая.

3.17. Докажите, что k-автоматные последовательности — это в точности морфические последовательности, полученные из k-равномерных морфизмов.

3.18. а) Докажите, что образ чисто морфической последовательности под действием морфизма морфичен.
б)* Докажите, что образ морфической последовательности под действием конечного автомата морфичен.

3.19. а) Докажите, что подсловная сложность морфической последовательности не больше $O(n^2)$.
б)* Докажите, что подсловная сложность чисто морфической последовательности может быть одного из следующих пяти типов: $O(1)$, $\Theta(n)$, $\Theta(n \log n)$, $\Theta(n \log \log n)$, $\Theta(n^2)$.
в)** Какой может быть подсловная сложность морфической последовательности?
г) А если последовательность одновременно чисто морфическая и почти периодическая? Или одновременно морфическая и почти периодическая?

3.20**. Существует ли алгоритм определения по двум морфическим последовательностям (точнее, по их конечным описаниям) того, являются ли они равными?

Занятие 4

Определение 4.1. Пусть p — это разреженное слово в конечном алфавите A, то есть слово из букв алфавита A, в котором на некоторых местах разрешены пропуски, обозначаемые $\Box$. Примеры: $ab\Box a\Box$, $a\Box b$, $a\Box$. По разреженному слову u можно построить последовательность следующим образом: запишем периодически слово u: $uuuu\ldots$. В оставшиеся пропуски (то есть в последовательность, образованную значками $\Box$) мы опять впишем последовательность $uuuu\ldots$, после чего с оставшимися пропусками сделаем то же самое, и так далее до бесконечности. Полученное бесконечное слово называется *словом Тёплица* и обозначается T_u.

Например, последовательность $T_{a\Box b}$ строится следующим образом: сначала записываем $a\Box ba\Box ba\Box ba\Box ba\Box ba\Box ba\Box ba\Box ba\Box b\ldots$, после следующего шага $aaba\Box babbaaba\Box babbaaba\Box babb\ldots$, потом $aabaababbaaba\square babbaababbabb\ldots$, и так далее. Другие примеры: $T_{a\square} = aaaaaaaa\cdots = a^\infty$, $T_{ab\square a\square} = abaababaaaabbaaabbaaabaaaabaababbaaabaaaabbababaaa\ldots$

4.2. Докажите, что слово Тёплица всегда почти периодично.

4.3. Является ли последовательность, полученная циклическим применением преобразования дракона к пустому слову (см. определение 3.6) словом Тёплица?

4.4. а) Докажите, что если в слове u один пропуск, то T_u чисто морфическая.
б) Докажите, что если количество пропусков в слове u делит его длину, то последовательность T_u морфическая.

4.5*. Найдите подсловную сложность слова Тёплица. (Указание: она зависит только от количества пропусков и длины порождающего слова, если только результат не периодический.)

Определение 4.6. Последовательность называется *квазипериодической* с *квазипериодом* u, если её можно целиком покрыть (возможно, перекрывающимися) вхождениями слова u. Пример: последовательность $abaababababaabaabaabaabababababa\ldots$ квазипериодична с квазипериодом aba. Последовательность называется *сильно квазипериодической*, если у неё найдётся бесконечное множество квазипериодов.

4.7. Докажите, что сильно квазипериодическая последовательность почти периодична.

Определение 4.8. Мы говорим, что *частота вхождения* символа a в последовательность x равна α, если $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|x[0,n-1]|_a}{n} = \alpha$, где $x[0,n-1]$ — префикс длины n последовательности x, а $|u|_a$ — количество вхождений символа a в слово u.

4.9. а) Докажите, что в заключительно периодической последовательности существует частота вхождения для любого символа.
б) Верно ли, что в каждой почти периодической последовательности существует частота вхождений любого символа?
в) Верно ли это для квазипериодических последовательностей?
г) А для слов Тёплица?

4.10. Для каждой пары из следующих классов последовательностей постройте последовательность, принадлежащую одному из них, но не принадлежащую другому (если это возможно): автоматные, морфические, почти периодические, последовательности Штурма, слова Тёплица, квазипериодические последовательности, сильно квазипериодические последовательности.

Определение 4.11. Последовательность Колакоски начинается следующим образом: 22112122122112112212112122112112122122112... Определяется она следующим образом. Рассмотрим преобразование, которое переводит последовательность $a_1a_2a_3\ldots$ из чисел 1 и 2 в последовательность, в которой идёт a_1 двоек, a_2 единиц, a_3 двоек, a_4 единиц, и так далее, попеременно. Последовательность Колакоски — это неподвижная точка этого преобразования.

4.12. а)** Существует ли в последовательности Колакоски частота вхождения символа 1? Докажите, что если она существует, то равна $\frac{1}{2}$.
б)** Верно ли, что всякое слово, которое встречается в последовательности Колакоски, встречается в ней хотя бы ещё раз?
в)* Докажите, что последовательность Колакоски не является чисто морфической.
г)** Является ли она морфической?