

**Задачи к лекции 1**  
**курса Г.Б.Шабата**

*Как может быть устроена трёхмерная Вселенная?*

- 1.1.** Каким наименьшим количеством карт можно покрыть окружность так, чтобы пересечение любых двух было *связно*?
- 1.2.** Каким наименьшим количеством карт можно покрыть двумерный тор?
- 1.3.** Всякая ли окружность в трёхмерном торе  $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$  ограничивает диск? Всякая ли двумерная сфера ограничивает трёхмерный шар? Те же вопросы для  $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^2$  и для  $\mathbf{S}^3$ .
- 1.4.** Рассмотрите действия групп вращений правильных многогранников на множествах вершин, рёбер, граней и всего остального, что придёт в голову. Для всех действий проверьте формулу орбит.
- 1.5.** Проверьте на примерах конформность стереографической проекции.
- 1.6.** С помощью кочерговой модели группы  $\mathbf{SO}_3$  вращений трёхмерного пространства найдите в этой группе нестягиваемую петлю. Убедите себя (а затем ближних), что, будучи пройдена дважды, эта петля стягиваема.
- 1.7.** Проверьте равносильность *вещественного* определения *кватернионов* (чисел вида  $x + yi + uj + vk$ , где  $x, y, u, v \in \mathbf{R}$  и умножение задаётся формулами  $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$ ,  $\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}$ ,  $\mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}$ ) и *комплексного* определения (чисел вида  $z + w\mathbf{j}$ , где  $z, w \in \mathbf{C}$  и умножение задаётся формулой  $(z_1 + w_1\mathbf{j})(z_2 + w_2\mathbf{j}) = z_1z_2 - w_1\bar{w}_2 + (z_1w_2 + w_1\bar{z}_2)\mathbf{j}$ ).
- 1.8.** Пользуясь геометрической интуицией, приведите примеры некоммутирующих поворотов трёхмерного пространства. Затем опишите их с помощью группы  $\mathbf{SU}_2$  и кватернионов.
- 1.9.** Нарисуйте стереографические проекции четырёх слоёв расслоения Хопфа.
- 1.10.** Опишите склейку двух полноторий в трёхмерную сферу  $\mathbf{S}^3$ . Разбейте оба полнотория на топологические многогранники и опишите склейки всех их граней для получения сферы.