

Ратмино, 07.7.25

Задачи к лекции 2
курса Г.Б.Шабата

Как может быть устроена трёхмерная Вселенная?

2.1. Можно ли сложить сферу \mathbf{S}^3 из кубов? А из тетраэдров?

2.2. (трудная!!). Опишите разбиение половины сферы \mathbf{S}^3 на 60 додекаэдров и вложение этой половины в трёхмерное пространство \mathbf{R}^3 . Если не получится (что наиболее вероятно), то опишите хотя бы принципиальный подход к решению этой задачи.

2.3. Рассмотрим на компакте X множество Met_X всех метрик, определяющих на нём правильную топологию. Для двух метрик $d_1, d_2 \in Met_X$ определим величину их отклонения друг от друга

$$\rho(d_1, d_2) := \max_{P_1, P_2 \in X} |d_1(P_1, P_2) - d_2(P_1, P_2)|.$$

Проверьте, что ρ задаёт метрику на Met_X .

2.4. Пусть C_1 и C_2 - две топологические окружности, вложенные в двумерный тор $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$. Всегда ли найдётся гомеоморфизм тора, переводящий C_1 в C_2 ? Ответьте на тот же вопрос, заменив тор на поверхность рода 2.

2.5. (дискретный Гаусс-Бонне). Для произвольного многогранника в трёхмерном пространстве назовём *дискретной кривизной в вершине* разность 2π и суммы примыкающих к вершине плоских углов.

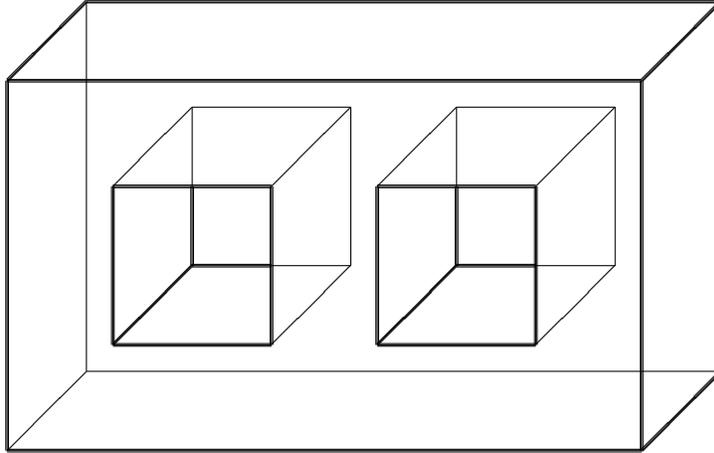
а) Нарисуйте вершину многогранника с положительной, нулевой и отрицательной дискретной кривизной.

б) Нарисуйте вершину многогранника с *чуть-чуть* положительной и с *близкой* к 2π дискретной кривизной.

в) Вычислите сумму дискретных кривизн по вершинам всех правильных многогранников.

г) Сконструируйте оконную раму в виде многогранника. Осознайте неизбежность наличия вершин и с положительной, и с отрицательной дискретной кривизной. Вычислите сумму дискретных кривизн по вершинам рамы. Желательно рассмотреть несколько вариантов.

д) Пользуясь прямоугольниками, из которых разрешается вырезать квадраты, составьте поверхность рода 2 – например, так:



Вычислите сумму дискретных кривизн по вершинам поверхности.

2.6. Нарисуйте на поверхности рода 2 образующие a, b, c, d её фундаментальной группы, связанные соотношением $aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1} = 1$. Затем нарисуйте на поверхности произвольную петлю и выразите её через образующие.

2.7. Вычислите фундаментальные группы всех освоенных 3-многообразий.

2.8. Приведите пример 3-многообразия с некоммутативной фундаментальной группой.