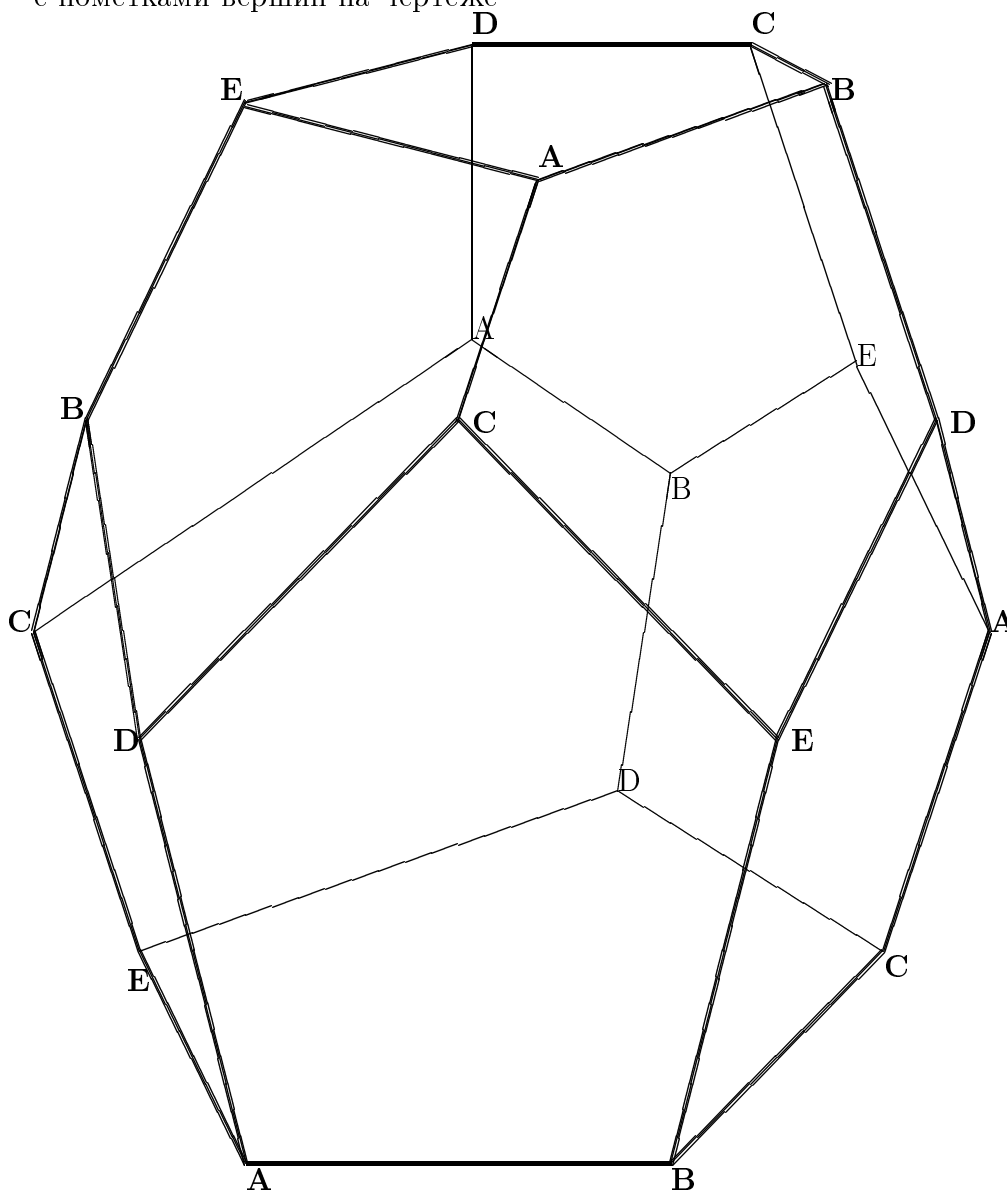


Ратмино, 07.7.27

Задачи к лекции 3
курса Г.Б.Шабата*Как может быть устроена трёхмерная Вселенная?*

3.1. *Додекаэдральной гомологической сферой Пуанкаре будем называть додекаэдр, у которого противоположные грани отождествлены в соответствии с пометками вершин на чертеже*



Для каких k на додекаэдральной гомологической сфере Пуанкаре найдутся k -рёберные нестягиваемые петли?

3.2. В отличие от конструкции в предыдущем примере, в котором противоположные грани при отождествлении поворачивались на $\frac{\pi}{5}$, рассмотрите аналогичную конструкцию с поворотом на $\frac{3\pi}{5}$. Пометьте рёбра ¹ так, чтобы они определяли отождествление ². Полученное топологическое пространство называется *многообразием Зайферта-Вебера* (построенное в 1933 году, оно было одним из первых известных 3-многообразий).

а) Проверьте, что это - действительно многообразие.

б) Вершины и рёбра исходного додекаэдра отображаются в некоторый граф в многообразии Зайферта-Вебера. Сколько в этом графе рёбер?

в) Известно, что многообразие Зайферта-Вебера гиперболично. Каковы в нём двугранные углы между образами граней исходного додекаэдра?

3.3. Опишите все 3-многообразия с фундаментальной группой из 8 элементов.

3.4. Приведите примеры двух склеек полноторий с неизоморфными фундаментальными группами.

3.5. К какому грубому типу относится 3-многообразие, заданное в \mathbf{C}^2 уравнением $|z|^4 + |w|^4 = 1$?

3.6. Постройте атлас для связной суммы двух трёхмерных торов.

3.7. Согласно теореме Андреева, для любой триангуляции T двумерной сферы \mathbf{S}^2 существует и с точностью до несущественных деталей единственно *замощение Андреева* трёхмерного гиперболического пространства \mathbf{H}^3 гиперболическими многогранниками, граница каждого из которых комбинаторно эквивалентна триангуляции T , а все двугранные углы - прямые. Назовём *группой Андреева* группу всех изометрий пространства \mathbf{H}^3 , сохраняющих замощение Андреева. Назовём *многообразием Андреева* фактор пространства \mathbf{H}^3 по любой подгруппе группы Андреева, имеющей в группе Андреева конечный индекс и действующей на \mathbf{H}^3 без неподвижных точек. Постройте

¹желательно – малыми латинскими буквами

²вершинами, как в предыдущем примере, отождествление определить нельзя, поскольку все вершины склеиваются в одну - проверьте!

атлас для какого-нибудь многообразия Андреева.

3.8. Постройте 3-многообразие, фундаментальная группа которого изоморфна группе (по умножен) верхнетреугольных целочисленных 3×3 -матриц с единицами на главной диагонали.