Аннотация курса

"Ряды Фарея"

лектор - проф. Н.Г. Мощевитин

Дубна 2008

Предполагается, что курс из четырех лекций познакомит слушателей с некоторыми классическими и новыми разделами теории чисел. В основном, он будет доступен для старшеклассинков и студентов 1-2 курсов.

1. **Дерево Фарея и цепные дроби**. Рациональные числа из отрезка $[0,1]$ можно "складывать" по правилу $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$. С помощью этой процедуры, связанной с разложением рационального числа в цепную дробь, можно получить все рациональные числа. Будет рассказано о получающемся таким образом дереве Фарея, последовательностях Фарея и Штерна-Броко и их многомерных обобщениях - сетях Фарея и многомерных цепных дробях.

2. **Теоретико-числовые функции**. Одним из классических объектов теории чисел являются мультипликативные функции, такие как функция Эйлера $\varphi(n)$ и функция Мебиуса $\mu(n)$. Будет рассказано об их простейших свойствах, в том числе и о связи с дзета-функцией Римана $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$.

3. **Ряды Фарея**. Основной проблемой математики по праву считается знаменитая гипотеза Римана о нулях дзета-функции. Будет рассказано о теореме Франеля, которая утверждает, что гипотеза Римана эквивалентна некоторому утверждению о распределении последовательностей Фарея.

4. **Вопрос-функция Мниковского**. Асимптотической функцией распределения для последовательностей Штерна-Броко является известная функция Минковского $?(x)$. Эта монотонная функция отображает отрезок $[0,1]$ в себя, она непрерывна. Так как, согласно теореме Лебега, монотонная функция дифференцируема почти всюду, у функции Минковского производная существует почти всюду, но ее производная почти всюду равна нулю. Более того, ее производная может принимать всего лишь два значения - 0 и $+\infty$.