"Представления колчанов и матричные задачи"

курс И.В. Аржанцева

летняя школа "Современная математика" (г. Дубна), 19-22 июля 2008 года

Задачи к занятию 3

Задача 1. Найдите определители матриц квадратичных форм, отвечающих графам A_n, D_n, E_6, E_7, E_8.

Задача 2. Докажите, что квадратичная форма, отвечающая связному графу, неотрицательно определена тогда и только тогда, когда это либо граф A_n, D_n, E_6, E_7, E_8, либо граф $\widetilde{A_n}$, $\widetilde{D_n}$, $\widetilde{E_6}$, $\widetilde{E_7}$, $\widetilde{E_8}$.

Задача 3. (Теорема Жордана-Гельдера) Докажите, что в разложении представления колчана в прямую сумму неразложимых представлений слагаемые определены однозначно с точностью до изоморфизма и порядка.

Задача 4. Подпредставлением представления колчана называется набор подпространств (по одному подпространству в каждом пространстве представления), элементы которого отображаются друг в друга по каждой из стрелок. Представление называется неприводимым, если оно не допускает собственных подпредставлений. Докажите, что неприводимое представление неразложимо и приведите пример неразложимого представления, не являющегося неприводимым. Для каких колчанов Вы можете описать все неприводимые представления?

Задача 5. Представление колчана называется шуровским, если группа его автоморфизмов одномерна. Докажите, что шуровское представление неразложимо. Приведите пример нешуровского неразложимого представления.

Задача 6. Докажите, что представление является шуровским тогда и только тогда, когда оно стабильно неразложимо, т.е. в пространстве представлений с данным вектором размерности наше представление обладает открытой (по Зарисскому) окрестностью, в которой все представления неразложимы.

Задача 7. Докажите, что для колчанов конечного типа все неразложимые представления являются шуровскими.

Задача 8. Докажите, что число слагаемых в разложении данного представления в сумму неразложимых равно максимальному значению r такому, что группа автоморфизмов представления содержит (алгебраическую) подгруппу, изоморфную $\mathbb{C}^* \times \cdots \times \mathbb{C}^*$ (r множителей).

Задача 9. Пусть Q — колчан и α — вектор размерностей для Q. Тогда найдутся вектора размерностей $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ такие, что $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$ и для открытого (по Зарисскому) подмножества в пространстве представлений $\mathrm{Rep}(Q, \alpha)$ разложение на неразложимые для любого представления из этого подмножества будет отвечать именно таким векторам размерностей. Докажите, что неразложимые представления, входящие в такие типичные разложения, являются шуровскими.