

## ”Представления колчанов и матричные задачи”

курс *И.В. Аржанцева*

летняя школа ”Современная математика” (г. Дубна), 19-22 июля 2008 года

### Задачи к занятию 4

**Задача 1.** Докажите, что фундаментальное множество для связного колчана  $Q$  пусто тогда и только тогда, когда  $Q$  — колчан типа  $A - D - E$ .

**Задача 2.** Докажите, что фундаментальное множество для связного колчана  $Q$  есть луч тогда и только тогда, когда  $Q$  — колчан типа  $\tilde{A} - \tilde{D} - \tilde{E}$ .

**Задача 3.** Пусть  $Q$  — колчан из задачи о пяти подпространствах. Докажите, что вектора размерностей из фундаментального множества  $F_Q$  колчана  $Q$  образуют полугруппу относительно покомпонентного сложения. Найдите образующие этой полугруппы.

**Задача 4.** Найдите все вещественные корни для колчана из задачи о четырех подпространствах двумя способами: решая уравнение  $q(\alpha) = 1$  и используя действие группы  $W$  на множестве простых корней.

**Задача 5.** Укажите прямое доказательство следующего факта: множество вещественных корней колчана  $Q$  пусто тогда и только тогда, когда в каждой вершине  $Q$  имеется хотя бы одна петля.

**Задача 6.** Приведите пример колчана  $Q$ , для которого элемент фундаментального множества  $F_Q$  действием группы  $W$  можно вывести за пределы  $F_Q$ .

**Задача 7.** Докажите, что число классов эквивалентности для пары флагов в данном пространстве с фиксированными векторами размерностей конечно.

**Задача 8.** Найдите число классов эквивалентности для пары полных флагов в трехмерном пространстве.

**Задача 9.** Пусть  $Q$  — колчан и  $\alpha$  — вектор размерностей, все компоненты которого отличны от нуля. Докажите, что на пространстве представлений  $\text{Rep}(Q, \alpha)$  имеется непостоянный многочлен, инвариантный относительно действия группы  $\text{GL}(\alpha)$ , тогда и только тогда, когда  $Q$  содержит ориентированный цикл.