Фиксируем большое натуральное N, и будем рассматривать многочлены от N переменных $x_1, \ldots, x_N$. Множество всех многочленов от переменных $x_1, \ldots, x_N$ мы обозначаем символом $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_N]$. Начнем с простого определения.

Определение 1. Многочлен $P(x_1, \ldots, x_N)$ называется симметрическим, если для любого набора $a_1, \ldots, a_N$ чисел выполнено равенство

$$P(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_N) = P(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_i, \ldots, a_N)$$

при любом выборе i, j от 1 до N. Множество симетрических многочленов от переменных $x_1, \ldots, x_N$ мы обозначаем символом $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_N]^{Sym}$.

Для некоторых многочленов сразу ясно, что они симметрические. Например, многочлен $P(x, y) = 2x^2y + 2xy^2 - 3x - 3y$ симметрический: если подставить $x = a, y = b$, а потом $x = b, y = a$, значения многочлена P окажутся одинаковыми, это будет сумма одних и тех же слагаемых, только в разном порядке.

Развивая эту мысль, можно построить операцию симметризации $Sym\colon \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_N] \to \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_N]^{Sym}$, которая превращает любой многочлен в симметрический. В сущности, мы просто добавляем подходящие члены, чтобы если наборы значений переменных отличаются перестановкой, члены тоже просто переставлялись.

Формальное определение такое: для одночлена $ax_1^{d_1}x_2^{d_2}\ldots x_N^{d_N}$ зададим

$$Sym(ax_1^{d_1}x_N^{d_N}\ldots x_N^{d_N}) = a\sum_{\sigma\in S_N} x_1^{d_{\sigma(1)}}x_2^{d_{\sigma(2)}}\ldots x_N^{d_{\sigma(N)}}.$$

Другими словами, мы всевозможными способами переставляем степени, а переменные оставляем на месте, и потом суммируем то, что получилось. Для произвольного многочлена $P(x_1, \ldots, x_N)$ положим значение $Sym(P)$ равным сумме значений отображения Sym на всех членах многочлена P. Весьма проясняет суть симметрических многочлнов следующий факт.

Задача 1. Для симметрического многочлена $P \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_N]^{Sym}$ многочлен $Sym(P)$ пропорционален P.

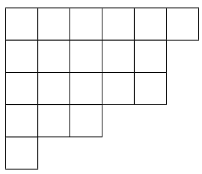
Доказательство этой задачи несложное, но требует некоторой хитрости. В качестве подспорья удобно использовать следующее более простое утверждение.

Задача 2. Если многочлен $P \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_N]$ имеет хотя бы один ненулевой член, он не может обращаться в нуль при всех значениях переменных.

В дальнейшем мы используем тот факт, что любой многочлен P из $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_N]^{Sym}$ можно выразить через суммы и произведения некоторого порождающего множества. Таких множеств мы укажем два. Элементы первого множества, $\{\sigma_1, \dots, \sigma_N \mid \sigma_n = Sym(x_1 x_2 \dots x_n)\}$, называются элементарными симметрическими многочленами. Элементы второго множества, $\{p_1, p_2, \dots \mid p_n = Sym(x_1^n)\}$, называются многочленами Ньютона. Мы будем считать, что $\sigma_0 = p_0 = 1$.

Теорема 1 (Основная теоремя теории симметрических многочленов). *Любой многочлен из $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_N]^{Sym}$ можно выразить через суммы и произведения многочленов $\sigma_1, \dots, \sigma_N$.*

Доказательство удобно вести, используя понятие диаграммы Юнга. Будем называть диаграммой Юнга табличку из клеточек, где все строчки выровнены по левому краю, и каждая следующая строчка не длиннее предыдущей, наподобие



Диаграммы мы будем обозначать греческими буквами λ, μ и т.д., множество всех диаграмм Юнга с количеством клеточек n обозначим символом $\mathbb{Y}_n$ (от первой буквы фамилии: Young). Для диаграммы $\lambda \in \mathbb{Y}_n$ через λ^+ будем обозначать множество диаграмм $\mu \in \mathbb{Y}_{n+1}$, которые получаются из диаграммы λ пририсовыванием в конец одного из столбцов одной клетки (так чтобы полученная картинка осталась диаграммой Юнга).

Будем использовать следующее соглашение: мы говорим, что член $a x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_N^{p_N}$ старше, или больше члена $b x_1^{q_1} x_2^{q_2} \dots x_N^{q_N}$, если $p_1 + \dots + p_N > q_1 + \dots + q_N$, либо если эти суммы равны и $p_1 > q_1$, либо, если эти суммы равны и $p_1 = q_1$ и $p_2 > q_2$ и т. д.

Из задачи 1 ясно, что самый старший член любого симметрического многочлена имеет вид $a x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_N^{\lambda_N}$, где $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$. Числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ мы будем считать высотами столбцов диаграммы Юнга и писать $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_N^{\lambda_N} = x^\lambda$, где $\lambda \in \mathbb{Y}_{\lambda_1 + \dots + \lambda_N}$.

Теперь доказательство теоремы совсем просто. Пусть $P \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_N]^{Sym}$ — симметрический многочлен, и ax^λ — его старший член. Пусть строки диаграммы λ имеют длины $\widehat{\lambda}_1, \dots, \widehat{\lambda}_m$. Тогда старшие члены многочленов P и $Q = \sigma_{\widehat{\lambda}_1}\sigma_{\widehat{\lambda}_2}\dots\sigma_{\widehat{\lambda}_m}$ совпадают, то есть старший член многочлена $P-Q$ строго меньше одночлена ax^λ. Рассуждая по индукции, мы можем считать, что для многочлена $P - Q$ утверждение теоремы выполнено. Теорема доказана. $\square$

Задача 3. Докажите, что элементарные симметрические многочлены алгебраически независимы, то есть если составить любой многочлен $P(\sigma_1, \dots \sigma_N)$, а потом подставить вместо символов $\sigma_1, \dots \sigma_N$ их значения как многочленов от $x_1 \dots x_N$, то полученный многочлен $\widehat{P}(x_1 \dots x_N)$ после приведения подобных членов будет ненулевым.

Задача 4. а)Любой многочлен из $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_N]^{Sym}$ можно выразить через суммы и произведения многочленов Ньютона $p_k, k \geq 0$.

б) Докажите, что между элементарными симметрическими многочленами и многочленами Ньютона для любого натурального n выполнено соотношение

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} p_k \sigma_{n-k}.$$

в) Докажите, что многочлены Ньютона $p_1, \dots, p_N$ от переменных $x_1, \dots, x_N$ алгебраически независимы.

Указание. Индукцию в пункте а) удобно вести по количеству различных переменных x_n, входящих в старший член.

Перейдем теперь к кососимметрическим многочленам.

Определение 2. Многочлен $P(x_1, \dots, x_N)$ называется кососимметрическим, если для любого набора $a_1, \dots, a_N$ чисел выполнено равенство

$$P(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_N) = -P(a_1, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_N)$$

при любом выборе $i \neq j$ от 1 до N. Множество кососимметрических многочленов от переменных $(x_1, \dots, x_N)$ мы обозначаем $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_N]^{Alt}$.

Подобно тому, как мы определили отображение симметризации $Sym\colon \mathbb{R}[x_1, \dots, x_N] \to \mathbb{R}[x_1, \dots, x_N]^{Sym}$, определим отображение альтернирования $Alt\colon \mathbb{R}[x_1, \dots, x_N] \to \mathbb{R}[x_1, \dots, x_N]^{Alt}$, превращающее любой многочлен в кососимметрический. На одночлене ax^λ определим

$$Alt(ax_1^{d_1} x_N^{d_N} \dots x_N^{d_N}) = a \sum_{\sigma \in S_N} (-1)^{\operatorname{sgn} \sigma} x_1^{d_{\sigma(1)}} x_2^{d_{\sigma(2)}} \dots x_N^{d_{\sigma(N)}} = \det \left(x_n^{\lambda_k} \right)_{n,k=1}^{N}.$$

Читателям, не знакомым с понятием определителя, достаточно считать символ $\det\left(x_n^{\lambda_k}\right)_{n,k=1}^N$ сокращением предыдущего выражения. Никаких свойств нам от него не потребуется.

Для кососимметрических многочленов верно утверждение, аналогичено утверждения задачи 1.

Задача 5. Для кососимметрического многочлена $P \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_N]^{Alt}$ многочлен $Alt(P)$ пропорционален P.

Обратим внимание на очевидное свойство: для $s_1, s_2 \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_N]^{Sym}$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_N]^{Alt}$ верно $s_1 \pm s_2, s_1 s_2, a_1 a_2 \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_N]^{Sym}$, $a_1 \pm a_2, s_1 a_1 \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_N]^{Alt}$, а также $\frac{s_1}{s_2}, \frac{a_1}{a_2} \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_N]^{Sym}$, $\frac{a_1}{s_1}, \frac{s_1}{a_1} \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_N]^{Alt}$, если эти отношения являются многочленами.

Обозначим $a_\lambda = Alt(x_\lambda)$. Будем называть диаграмму Юнга строго монотонной, если последовательность λ_n строго убывает или, что то же самое, в диаграмме λ нет столбцов одинаковой высоты. Очевидно, если диаграмма Юнга λ нестрого монотонна, то многочлен a_λ равен нулю.

Теорема 2. *Для любой строго монотонной диаграммы Юнга λ выполнено равенство*

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_N) a_\lambda = \sum_{\mu \in \lambda^+} a_\mu.$$

Для начала отметим, что поскольку $(x_1 + x_2 + \ldots + x_N) \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_N]^{Sym}$, $a_\lambda \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_N]^{Alt}$, левая часть есть антисимметрический многочлен. С другой стороны, пользуясь строгой монотонностью диаграммы Юнга λ, легко показать, что в левой части члены вида x_ν со строго монотонной диаграммой Юнга ν суть некоторые из произведений $x_\lambda x_n$, и только.

Комбинируя два предыдущих утверждения, получаем, что левая часть есть сумма некоторых из a_μ, где $\mu \in \lambda^+$ (а именно, тех, где диаграмма μ строго монотонна). Поскольку для нестрого монотонных диаграмм Юнга μ заведомо имеем $a_\mu = 0$, мы можем добавить эти многочлены к левой части, не изменяя ее значения. Доказательство закончено. $\square$

Многократное применение предыдущей леммы дает результат, который можно проинтерпретировать в терминах путей в графе Юнга.

Определение 3. Графом Юнга называется ориентированный граф, вершины которого суть всевозможные диаграммы Юнга, и стрелками соединяются диаграммы, которые отличаются добавлением одной клетки. Направление стрелок — от диаграммы меньшего размера к диаграмме Юнга большего размера.

Введем еще несколько обозначений: для диаграмм Юнга λ и μ обозначим через $\dim(\lambda, \mu)$ количество путей в графе Юнга, ведущих от λ к μ, и через $\dim^+(\lambda, \mu)$ — количество путей, проходящих только через строго монотонные диаграммы-вершины. Буквой ν будем обозначать диаграмму Юнга, где первый столбец содержит $N-1$ клетку, второй содержит $N-2$ клетки и т.д. (N — количество переменных).

В терминах путей в графе Юнга многократное применение предыдущей теоремы дает:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_N)^k a_\mu = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_{|\mu|+k}} \dim{}^+(\lambda, \mu).$$

Чтобы получить значение $\dim^+(\lambda, \mu)$, надо вычислить коэффициент стоящего в левой части многочлена при x_λ.

Рассмотрим сначала многочлен более простого вида $(x_1 + x_2 + \ldots + x_N)^k x_\mu$. Коэффициент этого многочлена при члене x_λ равен количеству способов разбить k-элементное множество на подможнества мощностей $(\lambda_1 - \mu_1), (\lambda_2 - \mu_2), \ldots, (\lambda_N - \mu_N)$, то есть выражению

$$\frac{k!}{(\lambda_1 - \mu_1)!(\lambda_2 - \mu_2)! \ldots (\lambda_N - \mu_N)!}$$

(если аргумент одного из факториалов отрицательный, считаем дробь равной нулю).

Вспомним теперь, что кроме x_μ многочлен a_μ содержит и другие члены, которые отличаются от x_μ перестановкой σ переменных и входят в многочлен a_μ со знаком $\operatorname{sgn}\sigma$. Все эти члены могут давать вклад в коэффициент при x_λ, в размере

$$\operatorname{sgn}(\sigma) \frac{k!}{(\lambda_1 - \mu_{\sigma(1)})!(\lambda_2 - \mu_{\sigma(2)})! \ldots (\lambda_N - \mu_{\sigma(N)})!}$$

Итого,

$$\begin{aligned}\dim{}^+(\lambda, \mu) = \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) \frac{k!}{(\lambda_1 - \mu_{\sigma(1)})!(\lambda_2 - \mu_{\sigma(2)})! \ldots (\lambda_N - \mu_{\sigma(N)})!} \\ = k! \det \left[\frac{1}{(\lambda_i - \mu_j)!} \right]_{i,j=1}^N\end{aligned}$$

Здесь, как и в предыдущей теореме, мы предполагаем, что диаграммы λ и μ строго монотонны. Нам же хотелось бы иметь формулу для произвольных диаграмм. Опять же, вместо значения $\dim^+(\lambda, \mu)$ нам более интересно было бы знать $\dim(\lambda, \mu)$. Однако же, как нетрудно видеть, $\dim(\lambda, \mu) = \dim^+(\lambda + \nu, \mu + \nu)$. В результате получаем:

Теорема 3. *Количество путей в графе Юнга, ведущих от диаграммы λ к диаграмме μ, задается следующей формулой:*

$$\dim(\lambda, \mu) = k! \det \left[\frac{1}{(\lambda_i - i - \mu_j + j)!} \right]_{i,j=1}^{N}.$$

Следующим объектом нашего изучения станут гармонические функции.

Определение 4. Гармонической функцией на ориентированном графе Γ называется любая неотрицательная функция f, определенная на множестве $V(\Gamma)$ вершин графа Γ, удовлетворяющая следующему условию: значение функции f в любой вершине $v \in V(\Gamma)$ равно сумме значений функции f во всех вершинах, куда из v выходят стрелки.

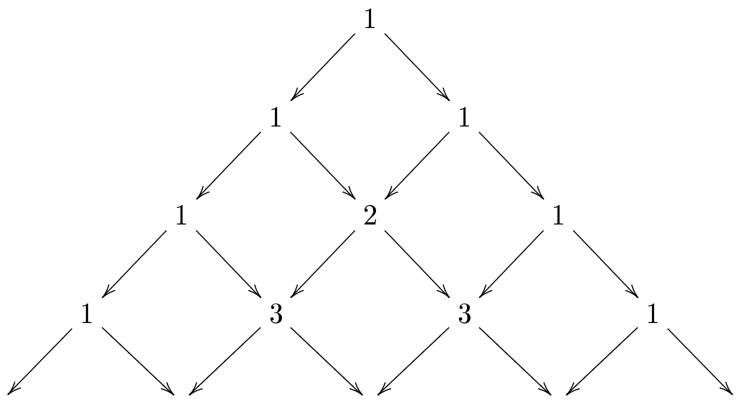
Ясно, что если гармоническую функцию умножить на число (т. е. умножить на одно и то же число значения во всех вершинах), она останется гармонической. Чтобы не отвлекаться на функции, полученные таким тривиальным способом, в интересующих нас случаях — в графе Юнга и в графе Паскаля — мы будем дополнительно предполагать, что значение гармонических функций в самой верхней вершине, откуда не выходят стрелки, должно быть равно 1.

Описание гармонических функций на графе Юнга — непростая задача. Начнем мы, поэтому, с описания гармонических функций на графе Паскаля и лишь затем применим похожую схему рассуждения к графу Юнга.

Графом Паскаля мы называем граф, в котором вершины суть числа из треугольника Паскаля, и стрелки ведут из каждого числа в два расположенных непосредственно под ним, то есть следующий граф:

Вершины в графе Паскаля мы обозначаем парами неотрицательных целых чисел. Вершина v обозначается парой (k, l), если, чтобы пройти в нее из самой верхней вершины нужно k раз пойти направо и l раз — налево. Другими словами, вершина (k, l) находится в строке $k + l + 1$ на месте $l + 1$.

Пользуясь этими обозначениями, мы в дальнейшем считаем, что гармоническая функции на графе Паскаля есть функция $\mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, удовлетворяющая условиям $\varphi(k, l) = \varphi(k + 1, l) + \varphi(k, l + 1)$, $k, l \in$



$\mathbb{Z}_{\geq 0}$; $\varphi(0,0) = 1$. Ответ в задаче описания гармонических функций на графе Паскаля дает следующая теорема (необходимые определения будут даны ниже).

Теорема 4. *Любая гармоническая функция на графе Паскаля может быть задана интегралом Римана-Стилтьеса*

$$\varphi(k,l) = \int_0^1 p^k (1-p)^l dg(p) \tag{1}$$

для некоторой монотонно неубывающей функции g, удовлетворяющей условиям $g(0) = 0, g(1) = 1$.

Для дальнейшего нам понадобится уже упомянутое выше понятие интеграла Римана-Стилтьеса, а также понятие обычного интеграла Римана. Вместо того, чтобы давать их (довольно сложные) определения, мы перечислим несколько свойств, которые позволят понять, о чем идет речь. Для читателей, которым вводимые понятия уже знакомы, перечисляемые свойства будут нетрудными упражнениями. Остальным этих свойств будет вполне достаточно, чтобы проделать необходимые вычисления.

Если на отрезке $[a,b]$ заданы функции f и g, то интеграл Римана функции f обозначается

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

а интеграл Римана-Стильтьеса функции f относительно g —

$$\int_a^b f(x)\,dg$$

(если они существуют).

Начнем со свойств интеграла Римана.

Свойство 1. Если функция f кусочно постоянна на промежутках

$$\Delta_1 = (a, x_1), \Delta_2 = (x_1, x_2), \ldots, \Delta_n = (x_{n-1}, b),$$

то (независимо от значений f в концах промежутков) интеграл Римана функции f на отрезке $[a, b]$ существует, и

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^n l(\Delta_i) f(\Delta_i),$$

где $l(\Delta_i)$ — длина i-того промежутка, а $f(\Delta_i)$ — значение функции на i-том промежутке.

Свойство 2. Функция f, непрерывная на отрезке $[a, b]$, интегрируема на нем в смысле Римана.

Свойство 3. Если функции f_1 и f_2 интегрируемы на отрезке $[a, b]$, и во всех точках отрезка $[a, b]$ разность значений f_1 и f_2 не превосходит по модулю числа ε, то разность

$$\int_a^b f_1(x)\,dx - \int_a^b f_2(x)\,dx,$$

не превосходит по модулю величины $\varepsilon(b - a)$.

В совокупности все три свойства позволяют нам оценивать интеграл Римана непрерывной функции с любой точностью — достаточно просто приблизить ее кусочно-постоянной функцией. Перейдем теперь к свойствам интеграла Римана-Стилтьеса.

Свойство 4. Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, а функция g кусочно постоянна на промежутках $[a, x_1], (x_1, x_2], \ldots, (x_{n-1}, x_n]$, то интеграл Римана-Стилтьеса функции f относительно g существует и равен

$$g(x_1)f(x_1) + g(x_2)f(x_1) + \ldots + g(x_n)f(x_n).$$

Свойство 5. Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, а функция g монотонна, то интеграл Римана-Стилтьеса функции f относительно g существует. Если к тому же g имеет непрерывную производную, то верно равенство

$$\int_a^b f(x)\,dg = \int_a^b f(x) g'(x)\,dx.$$

Свойство 6. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, для всех натуральных n функции g_n монотонны и функция g также монотонна на отрезке $[a, b]$ (в силу предыдущего свойства это означает, что существуют интегралы Римана-Стилтьеса функции f относительно g и относительно всех g_n).

Предположим теперь дополнительно, что на некотором плотном множестве $M \subset [a, b]$ последовательность функций g_n поточечно сходится к функции g (т. е. $\forall x \in M \colon g_n(x) \to g(x)$).

Тогда предел последовательности интегралов $\int_a^b f(x)\, dg_n$ существует и равен $\int_a^b f(x)\, dg$.

Последнее из перечисленных свойств интеграла Римана-Стилтьеса хотя и сложно формулируется, окажется для нас весьма полезным в свете следующего факта.

Задача 6. Из любой последовательности f_n монотонно неубывающих на отрезке $[a, b]$ функций, удовлетворяющих условию $f_n(a) \geq 0$, $f_n(b) \leq 1$), можно выделить подпоследовательность, которая во всех рациональных точках отрезка $[a, b]$ будет сходиться к некоторой (определенной на отрезке $[a, b]$ монотонно неубывающей) функции f.

Указание. Из любой ограниченной числовой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Перед тем, как перейти к доказательству теоремы 4, сформулируем в качестве упражнения еще один технический факт. Обозначим через $\dim((p, q), (k, l))$ количество путей в графе Паскаля, идущих из вершины (p, q) в вершину (k, l). Очевидно,

$$\dim((p, q), (k, l)) = \frac{(k - p + l - q)!}{(k - p)!(l - q)!}.$$

Упражнение 1. Если величина $k + l$ превосходит некоторое большое число A, то для некоторого положительного C выполнено неравенство

$$\left| \frac{\dim((p, q), (k, l))}{\dim((0, 0), (k, l))} - \left(\frac{k}{k + l}\right)^p \left(\frac{l}{k + l}\right)^q \right| \leq \frac{C}{k + l}.$$

З аметим, в первую очередь, что в силу гармоничности функции φ раз $\varphi(0, 0) = 1$, то и

$$\sum_{k+l=n} \varphi(k, l) \dim((0, 0), (k, l)) = 1,$$

и вообще

$$\varphi(k_0,l_0)=\sum_{k+l=n}\varphi(k,l)\dim((k_0,l_0),(k,l)).$$

Введем теперь два обозначения. Обозначим через M функцию $\mathbb{Z}_{\geq 0}\times\mathbb{Z}_{\geq 0}\to\mathbb{R}$, равную $\varphi(k,l)\dim((0,0),(k,l))$, и через $\mathbf{M}_n$ — функцию $[0,1]\to\mathbb{R}$, равную $\sum_{k+l=n}M(k,l)\theta_{k/(k+l)}$ (здесь θ_a — функция Хевисайда, ступенька, равная 0 при $x\leq a$ и 1 при $x>a$). В силу сказанного выше при любом n функция $\mathbf{M}_n$ монотонно неубывает и принимает значения между 0 и 1.

Наконец, запишем:

$$\begin{aligned}\varphi(k_0,l_0)&=\sum_{k+l=n}\varphi(k,l)\dim((k_0,l_0),(k,l))\\&=\sum_{k+l=n}M(k,l)\frac{\dim((k_0,l_0),(k,l))}{\dim((0,0),(k,l))}\\&=\sum_{k+l=n}M(k,l)\left[\left(\frac{k}{k+l}\right)^{k_0}\left(\frac{l}{k+l}\right)^{l_0}+O\left(\frac{1}{k+l}\right)\right]\\&=\int_0^1 p^{k_0}(1-p)^{l_0}d\mathbf{M}_n(p)+O\left(\frac{1}{k+l}\right).\end{aligned}$$

Выбирая из $\mathbf{M}_n$ подпоследовательность, которая во всех рациональных точках сходится к некоторой функции $\mathbf{M}$, и переходя к пределу $n\to\infty$, получаем

$$\varphi(k_0,l_0)=\int_0^1 p^{k_0}(1-p)^{l_0}d\mathbf{M}(p).$$

$\square$

На формулировку теоремы 4 можно посмотреть и по-другому. Отрезок $[0,1]$, можно проинтерпретировать как «нижнюю границу» графа Паскаля (стандартный термин — граница Мартина графа Паскаля). Каждой точке «границы» сопоставляется гармоническая функция (а именно, точке $p\in[0,1]$ сопоставляется функция $(k,l)\to p^k(1-p)^l$; эта функция получается из формулы (1) при подстановке $g=\theta_p$), и произвольная гармоническая функция получается комбинацией (т. е. интегралом Римана-Стилтьеса) таких функций.

Попробуем обосновать использование термина «граница». Обозначим символом Γ граф Паскаля, и пусть $V(\Gamma)$ — множество его вершин. Рассмотрим объединение $\overline{\Gamma}=\Gamma\cup[0,1]$.

Открытыми множествами в $\overline{\Gamma}$ назовем

1) множества из одной любой вершины графа Γ;

2) для любых $\varepsilon > 0$ и $p \in [0,1]$ — множество $\{q \in [0,1] \mid |p-q| < \varepsilon\} \cup \{(k,l) \in V(\Gamma) \mid \left|\frac{k}{k+l} - p\right| < \varepsilon\}$;

3) любое множество $U \subset \overline{\Gamma}$, которое можно получить комбинацией объединений и конечных пересечений множеств, перечисленных в пунктах 1) и 2).

При таком определении открытых множеств сам по себе граф Γ не компактен, а множество $\overline{\Gamma}$ уже компактно. Отсюда и название «граница»: отрезок $[0,1]$ компактифицирует граф Паскаля подобно тому, как единичная окружность компактифицирует единичный круг без края на плоскости.

Перейдем теперь к гармоническим функциям на графе Юнга. Начнем с ответа, и сформулируем его в аналогичном виде: укажем границу Мартина графа Юнга, каждой точке границы сопоставим «экстремальную» гармоническую функцию, и докажем, что произвольная гармоническая функция на графе Юнга есть комбинация экстремальных.

Теорема 5. *Любая гармоническая функция φ на графе Юнга может быть задана интегралом по некоторой вероятностной мере P выражением*

$$\varphi(\mu) = \int_{\omega\in\Omega} s^{\circ}_{\mu}(\omega) P(d\omega).$$

Определим входящие в формулировку символы. Границей Мартина графа Юнга будет множество Ω, которое есть множество пар (α_n, β_n) невозрастающих числовых последовательностей с неотрицательными членами, удовлетворяющих свойству

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n + \beta_n) \leq 1.$$

Последнее означает всего лишь, что последовательность $S_k = \sum_{n=1}^{k}(\alpha_n + \beta_n)$ имеет при $k \to \infty$ предел S, и $S \leq 1$.

Перейдем теперь к интегрированию по мере. Для простоты ограничимся интегрированием непрерывных функций, которые только нам и понадобятся.

Определение 5. Интегралом на множестве M по вероятностной мере P, будем называть любой непрерывный линейный функционал Φ_P на множестве $C(M)$ (вещественных) непрерывных функций на множестве M, значение которого на тождественно единичной функции равно 1.

Распишем предыдущее определение более подробно. Слова «линейный функционал» означают, что Φ_P — отображение $C(M) \to \mathbb{R}$, удовлетворяющее двум свойствам:

1) для любых непрерывных функций $f, g \in C(M)$ выполнено равенство $\Phi_P(f) + \Phi_P(g) = \Phi_P(f + g)$;

2) для любой непрерывной функции $f \in C(M)$ и любого числа $a \in \mathbb{R}$ верно равенство $\Phi_P(a \cdot f) = a \cdot \Phi_P(f)$.

Непрерывность функционала Φ_P расшифровывается так: если для некоторой непрерывной функции $f \in C(M)$ имеем $\Phi_P(f) = a$, то для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ при подходящем выборе $\delta > 0$ для всех функций $g \in C(M)$, которые всюду на M отличаются от f не более, чем на δ, имеем $|\Phi(g) - a| \leq \varepsilon$.

Задача 7. Пусть $M = [a, b]$. Проверьте, что интеграл Римана-Стилтьеса относительно любой монотонно неубывающей функции g, где $g(a) = 0, g(b) = 1$, есть интеграл по вероятностной мере.

Замечание 1. Замечательный (и непростой) факт состоит в том, что для $M = [a, b]$ верно и обратное: для любой вероятностной меры P на $[a, b]$ можно найти такую монотонную функцию $g = g(P)$, что для любой непрерывной функции $f \in C([a, b])$ окажется

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_{[a,b]} f(x)P(dx).$$

Это утверждение называется теоремой Рисса.

Введем еще одно обозначение. Если все члены последовательности a_n не превосходят по модулю единицы, определим функцию «норма»: $\|a_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{2^n}$.

Упражнение 2. Для любой последовательности, a_n где все члены не превосходят по модулю единицы, сумма $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{2^n}$ существует.

Упражнение 3. Проверьте «неравенство треугольника»: $\|a_n + b_n\| \leq \|a_n\| + \|b_n\|$.

Задача 8. Назовем ε-окрестностью точки $(\alpha_n, \beta_n) \in \Omega$ множество

$$U_\varepsilon(\alpha_n, \beta_n) = \{(\widetilde{\alpha}_n, \widetilde{\beta}_n) \in \Omega \mid \|\alpha_n - \widetilde{\alpha}_n\| + \|\beta_n - \widetilde{\beta}_n\| < \varepsilon.\}$$

Назовем множество $U \subset \Omega$ открытым, если вместе с каждой своей точкой $(\alpha_n, \beta_n) \in U$, оно целиком содержит и множество $U_\varepsilon(\alpha_n, \beta_n)$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

Докажите, что множество Ω является компактным, то есть из каждого его покрытия открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие.

Подходящее для нашего случая определение непрерывной функции следующее.

Определение 6. Функция $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ называется непрерывной в точке $(\alpha_n, \beta_n) \in \Omega$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать $\delta > 0$ так, что если для точки $(\widetilde{\alpha}_n, \widetilde{\beta}_n) \in \Omega$ верно

$$\|\alpha_n - \widetilde{\alpha}_n\| + \|\beta_n - \widetilde{\beta}_n\| \leq \delta,$$

то выполнено неравенство

$$\Big| f(\alpha_n, \beta_n) - f(\widetilde{\alpha}_n, \widetilde{\beta}_n) \Big| \leq \varepsilon.$$

Функция f называется непрерывной на множестве Ω, если она непрерывна в любой его точке.

Нам потребуются следующие простые свойства непрерывных функций.

Упражнение 4. Сумма, разность и произведение непрерывных функций суть непрерывные функции.

Упражнение 5. Для любых натуральных значений n_0 и k_0 функции $A_{n_0,k_0}\colon (\alpha_n, \beta_n) \to \alpha_{n_0}^{k_0}$ и $B_{n_0,k_0}\colon (\alpha_n, \beta_n) \to \beta_{n_0}^{k_0}$ непрерывны.

Упражнение 6. Любая непрерывная на множестве Ω функция ограничена и достигает на Ω минимума и максимума.

Следующие два утверждения доказываются более сложно.

Задача 9. Пусть f_n — последовательность непрерывных функций на некотором множестве M (где либо $M \subset \mathbb{R}$, либо $M = \Omega$), и функция f тоже определена на множестве M. Предположим, для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что при всех $n > N$ и при всех $x \in M$ выполнено неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Тогда функция f непрерывна на множестве M.

Задача 10. Для всех натуральных $k > 1$ суммы $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ существуют.

Нам потребуется следующий технический факт:

Лемма 1. *Функции $A_k(\alpha, \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^k$ и $B_k(\alpha, \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^k$ определены при всех $(\alpha, \beta) \in \Omega$ (т. е. бесконечные суммы существуют) и непрерывны.*

Проведем доказательство для функций A_k, для функций B_k оно совершенно аналогично.

Рассмотрим частичные суммы $S_m(A_{n,k}) = \sum_{n=1}^{m} A_{n,k}$. Поскольку при любом $(\alpha, \beta) \in \Omega$ последовательность α_n не возрастает и $\sum_{n=1}^{\infty} \leq 1$, то всегда $\alpha_n \leq \frac{1}{n}$ и $\alpha_n^k \leq \frac{1}{n^k}$.

Как мы знаем из задачи 10, суммы $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ существуют. Это дает нам оценку

$$S_m(A_{n,k}) = \sum_{n=1}^{m} \alpha_n^k \leq \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^k} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}.$$

Мы получаем, что при любом $(\alpha, \beta) \in \Omega$ последовательность $S_m(A_{n,k})$ ограничена. Так как она, очевидно, монотонно неубывает, она имеет предел. Тем самым, функции A_k определены на множестве Ω.

Проверим теперь непрерывность функций A_k. Суммы $S_m(A_{n,k})$ при всех m представляют собой непрерывные функции, поскольку это суммы конечного числа непрерывных (см. упражнение 5) функций. Мы хотим доказать непрерывность функций A_k, пользуясь утверждением задачи 9, для этого нам надо только оценить разность $A_k - S_m(A_{n,k})$.

Из сказанного выше следует, что $A_k - S_m(A_{n,k}) \leq \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n^k}$. С другой стороны, поскольку сумма $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ существует, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, выбирая N достаточно большим, мы можем быть уверены, что при всех $m > N$ выражение $\sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ не превосходит ε. Доказательство закончено. $\square$

Теперь мы можем перейти к определению последних непонятных символов в формулировке теоремы — функций $s_\mu^\circ(\omega)$, где $\omega = (\alpha, \beta) \in \Omega$. Конструкция, которую мы для этого используем, довольна хитроумна: сначала мы определим симметрические многочлены $s_\mu(x_1, \ldots, x_N)$, а потом построим отображение $F^\circ \colon \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_N]^{Sym} \to C(\Omega)$ из множества $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_N]^{Sym}$ симметрических многочленов от N переменных в множество непрерывных функций на множестве Ω и обозначим $s_\mu^\circ = F^\circ(s_\mu)$.

Оказывается, верно следующее интересное утверждение.

Задача 11. Любой кососимметрический многочлен от N переменных делится на многочлен $\prod_{1\le i<j\le N}(x_i - x_j)$.

Воспользовавшись этим фактом, определим многочлены s_μ так:

$$s_\mu(x_1,\dots,x_N) = \frac{a_{\mu+\nu}(x_1,\dots,x_N)}{\prod_{1\le i<j\le N}(x_i - x_j)},$$

где ν — диаграмма Юнга, i-тый столбец который состоит из $N-i$ клеток. Поскольку числитель и знаменатель оба — кососимметрические многочлены, s_μ — симметрический многочлен.

На этом месте договоренность «возьмем N достаточно большим, и будем рассматривать многочлены от переменных $x_1,\dots,x_N$» перестает нас удовлетворять. При рассмотрении диаграмм Юнга нам важно, чтобы число N было не меньше, чем количество столбцов в них. В случае, когда мы имеем дело с графом Юнга, то есть со всеми диаграммами Юнга одновременно, неудобство такого подхода можно предвидеть сразу. В частности, уже чтобы определить отображение F°, мы вынуждены обратиться к бесконечному количеству переменных.

Определение 7. Симметрическим многочленом f от переменных $\{x_k\}$, $k\in\mathbb{N}$, называется последовательность f_n многочленов, где $f_N \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_N]^{Sym}$ и $f_{N+1}\mid_{x_{N+1}=0} = f_N$. Множество всех симметрических многочленов от переменных $\{x_k\}$, $k\in\mathbb{N}$, обозначается символом $\mathbb{R}[x_1,x_2,\dots]^{Sym}$.

Чтобы определить многочлены s_μ как элементы $\mathbb{R}[x_1,x_2,\dots]^{Sym}$, потребуется следующее утверждение.

Задача 12. Проверьте, что $s_\mu(x_1,\dots,x_{N+1})\mid_{x_{N+1}=0} = s_\mu(x_1,\dots,x_N)$.

Определим многочлены p_k, $k\in\mathbb{N}$ от переменных $(x_1,x_2,\dots)$ формулой $p_k = x_1^k + x_2^k + \dots$ Количество переменных при этом можно считать любым конечным или бесконечным.

Чтобы задать отображение F° как отображение $\mathbb{R}[x_1,x_2,\dots]^{Sym}\to C(\Omega)$, мы должны (согласованно) задать его на всех множествах $\mathbb{R}[x_1,\dots,x_N]^{Sym}$, $N\in\mathbb{N}$. Для этого мы укажем его значение на многочленах p_k (точнее, при фиксированном N мы рассматриваем многочлены p_k как многочлены от N переменных, и разрешаем параметру k пробегать значения $1,\dots,N$).

Мы знаем, что любой симметрический многочлен может быть выражен через суммы и произведения многочленов p_k, и что многочлены p_k алгебраически независимы, так что тем самым отображение F° будет задано на всем множестве $\mathbb{R}[x_1,\dots,x_N]^{Sym}$. Итак, зададим $p_k^\circ =$

$F^\circ(p_k) = A_k + (-1)^k B_k$. В силу леммы 1 функции p_k° определены и непрерывны на Ω.

Расшифровка формулировки теоремы 5 на этом закончена. При доказательстве теоремы 5 мы используем рассуждение, подобное использованному в данном выше доказательстве теоремы 4, и нам понадобятся аналоги свойства 6 и упражнения 1.

Свойство 7. Пусть P_n -последовательность вероятностных мер на Ω и $f(\omega) \in C(\Omega)$. Тогда существуют такая подпоследовательность $\widehat{P}_k \subset P_n$ и такая вероятностная мера P на множестве Ω, что при $k \to \infty$ верно

$$\int_\Omega f(\omega) d\widehat{P}_k(\omega) \to \int_\Omega f(\omega) dP(\omega).$$

Лемма 2. *Сопоставим каждой диаграмме Юнга λ элемент $\omega_\lambda = (\alpha_n, \beta_n) \in \Omega$ по следующему правилу: α_n есть количество клеток в строке n диаграммы λ правее диагонали, деленное на $|\lambda|$, и β_n есть количество клеток в столбце n диаграммы λ ниже диагонали, деленное на $|\lambda|$. Очевидно, всегда $\sum_{n=1}^\infty (\alpha_n + \beta_n) < 1$.*

Фиксируем $\mu \in \mathbb{Y}$, тогда при $|\lambda| \to \infty$ имеем

$$\frac{\dim(\mu, \lambda)}{\dim \lambda} = s_\mu^\circ(\omega_\lambda) + O\left(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}\right). \tag{2}$$

Доказательство леммы 2 гораздо более сложно, чем доказательство упражнения 1, и ниже мы потратим на него немалые усилия. В свойство 7 мы и вовсе попросим читателей поверить. Сейчас же мы продолжим доказательство.

Доказательство теоремы 5. Пусть φ — гармоническая функция на графе Юнга, и пусть δ_ω, где $\omega \in \Omega$, — вероятностная мера на Ω, интеграл любой функции $f \in C(\Omega)$ по которой равен $f(\omega)$. Как и в доказательстве теоремы введем последовательность функций $M_n \colon \mathbb{Y}_n \to \mathbb{R}$, $M_n(\lambda) = \dim \lambda \cdot \varphi(\lambda)$, и последовательность вероятностных мер $\mathbf{M}_n$ на Ω,

$$\mathbf{M}_n = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n} M_n(\lambda) \delta_{\omega_\lambda}.$$

Из гармоничности функции φ следует, что все $\mathbf{M}_n$ действительно являются вероятностными мерами.

Пользуясь гармоничностью функции φ, леммой 2 и свойством 7, мы можем записать

$$\begin{aligned}\varphi(\mu) &= \sum_{\lambda\in\mathbb{Y}_n} \dim(\mu,\lambda)\varphi(\lambda) = \sum_{\lambda\in\mathbb{Y}_n} \frac{\dim(\mu,\lambda)}{\dim\lambda} M_n(\lambda) \\ &= \sum_{\lambda\in\mathbb{Y}_n} \left(s_\mu^\circ(\omega_\lambda) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) M_n(\lambda) = \sum_{\lambda\in\mathbb{Y}_n} s_\mu^\circ(\omega_\lambda) M_n(\lambda) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \int_\Omega s_\mu^\circ(\omega_\lambda) d\mathbf{M}_n(\omega) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).\end{aligned}$$

Устремляя n к бесконечности и выбирая подходящую подпоследовательность, получаем

$$\int_\Omega s_\mu^\circ(\omega_\lambda) dP(\omega).$$

Доказательство теоремы 5 закончено, за исключением леммы 2, к доказательству которой мы и переходим. □

Сначала мы перепишем правую часть равенства 2 с использованием новых обозначений. При $m > 0$ обозначим $x^{\downarrow m} = x(x-1)\dots(x-m+1)$, и дополнительно мы считаем $x^{\downarrow 0} = 1$. Определим

$$s_\mu^*(x_1,\dots,x_N) = \frac{\det((x_i+N-i)^{\downarrow(N-j+\mu_j)})_{i,j=1}^N}{\det((x_i+N-i)^{\downarrow(N-j)})_{i,j=1}^N}.$$

Подобно тому, как многочлены s_μ симметричны относительно переменных $x_1,\dots,x_N$, функции s_μ^*, как нетрудно понять, симметричны относительно переменных $x_1-1,\dots,x_N-N$.

Выбор обозначения s_μ^* объясняется также утверждением следующей задачи.

Задача 13. а) Докажите равенство

$$\det(x_i^{j-1})_{i,j=1}^N = (-1)^N \prod_{1\le i<j\le N} (x_i - x_j).$$

Определитель, стоящий в левой части, называется определителем Вандермонда.

б) Проверьте, что

$$s_\mu(x_1,\dots,x_N) = \frac{\det(x_i^{N-j+\mu_j})_{i,j=1}^N}{\det(x_i^{N-j})_{i,j=1}^N}.$$

в) Пусть $q_j, j = 1, \ldots, N$ — многочлены от одной переменной степени $j-1$ с единичным коэффициентом при старшем члене. Докажите равенство

$$\det(q_j(x_i))_{i,j=1}^N = (-1)^N \prod_{1 \le i < j \le N} (x_i - x_j).$$

г) Вычислите определитель $\det((x_i + N - i)^{\downarrow(N-j)})_{i,j=1}^N$.

д) Проверьте, что функция $s^*_\mu(x_1, \ldots, x_N)$ является на самом деле многочленом.

Также как это пришлось сделать для многочленов s_μ, мы вынуждены будем рассматривать многочлены s^*_μ от бесконечного количества переменных.

Определение 8. Обозначим символом $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_N]^{Sym*}$ множество «сдвинутых» симметрических многочленов от переменных $x_1, \ldots, x_N$, т. е. многочленов, симметрических относительно переменных $x_1 - 1, \ldots, x_N - N$. «Сдвинутым» симметрическим многочленом f от переменных $\{x_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, назовем последовательность f_n многочленов, где $f_N \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_N]$ и $f_{N+1}(x_1, \ldots, x_{N+1}) \mid_{x_{N+1}=0} = f_N(x_1, \ldots, x_N)$. Множество всех «сдвинутых» симметрических многочленов от переменных $\{x_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, обозначается $\mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots]^{Sym*}$.

Задача 14. Проверьте, что $s^*_\mu(x_1, \ldots, x_{N+1}) \mid_{x_{N+1}=0} = s^*_\mu(x_1, \ldots, x_N)$.

Задача 15. Выведите из формулы для числа путей, полученной в теореме 3, равенство:

$$\frac{\dim(\mu, \lambda)}{\dim \lambda} = \frac{1}{|\lambda|^{\downarrow|\mu|}} \cdot \frac{\det((\lambda_i + N - i)^{\downarrow(\mu_j + N - j)})_{i,j=1}^N}{\prod_{1 \le i < j \le N} (\lambda_i - i + \lambda_j + j)},$$

где N — любое число, превосходящее количество столбцов в диаграмме Юнга λ.

Пользуясь предыдущей задачей утверждение леммы 2 можно переписать в виде

$$\left| \frac{s^*_\mu(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)}{|\lambda|^{\downarrow|\mu|}} - s^\circ_\mu(\omega_\lambda) \right| = O\left(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}} \right). \tag{3}$$

Произвольному многочлену $f \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_N]^{Sym*}$ поставим в соответствие многочлен $f_* \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_N]$, равный сумме всех членов многочлена f максимальной по совокупности переменных степени.

Упражнение 7. Для любого многочлена f из $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_N]^{Sym*}$ с необходимостью имеем $f_* \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_N]^{Sym}$.

Рассматривая $f \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots]^{Sym*}$ как последовательность $f = (f_1, f_2, \ldots)$, мы можем задать отображение $*\colon \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots]^{Sym*} \to \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots]^{Sym}$ покомпонентно.

Упражнение 8. Пусть $f = (f_1, f_2, \ldots) \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots]^{Sym*}$, тогда $(f_n)_* = (f_*)_n$.

Упражнение 9. Пусть $f, g \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots]^{Sym*}$, тогда $f_* + g_* = (f+g)_*$ и $f_* g_* = (fg)_*$.

Задача 16. Проверьте, что $(s^*_\mu)_*(x_1, x_2, \ldots) = s_\mu(x_1, x_2, \ldots)$.

При $k \geq 2$ определим многочлен $p^*_k(x_1, x_2, \ldots)$ от конечного или бесконечного числа переменных формулой

$$p^*_k(x_1, x_2, \ldots) = \sum_{i=1}^{\infty} \left((x_i - i + 1)^{\downarrow k} - (-i+1)^{\downarrow k} \right).$$

Задача 17. Проверьте, что $(p^*_k)_*(x_1, x_2, \ldots) = p_k(x_1, x_2, \ldots)$.

Задача 18. а) Проверьте равенство: $kc^{\downarrow(k-1)} = (c+1)^{\downarrow k} - c^{\downarrow k}$.

Пусть λ — диаграмма Юнга, и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — длины ее строк.

б) Докажите, что

$$p^*_k(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = k \sum_{(i,j)=\square\in\lambda} (j-i)^{\downarrow(k-1)},$$

где суммирование в правой части ведется по всем клеткам диаграммы Юнга λ, парой (i, j) обозначаются номер строки и номер столбца.

Указание. Удобно вести суммирование по строкам диаграммы Юнга λ, используя пункт а).

в) Обозначим символом $a_i(\lambda)$ количество клеток в i-той строке диаграммы Юнга λ правее диагонали и символом $b_i(\lambda)$ количество клеток в i-том столбце диаграммы ниже диагонали. Проверьте, что

$$p^*_k(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{a_i(\lambda)}{n}\right)^k + (-1)^{k+1} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{b_i(\lambda)}{n}\right)^k + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Указание. Удобно разбить сумму, выражающую p_k^* в пункте б), на три части: слагаемые, отвечающие клеткам на диагонали диаграммы Юнга, слагаемые, отвечающие клеткам выше диагонали, и слагаемые, отвечающие клеткам ниже диагонали.

Задача 19. Любой многочлен $f \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots]^{Sym*}$ можно выразить через суммы и произведения многочленов p_k^*, $k \geq 1$, (мы обозначаем $p_1^* = 1$), и многочлены p_k^*, $k \geq 1$ алгебраически независимы.

Вместо того, чтобы проверять неравенство 3, докажем более сильное утверждение.

Лемма 3. *Для любого многочлена $f \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_N]^{Sym*}$ и любой диаграммы Юнга с длинами строк $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ справедливо неравенство*

$$\left| \frac{f(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)}{|\lambda|^{\downarrow|\mu|}} - (f_*)^\circ(\omega_\lambda) \right| = O\left(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}} \right), \tag{4}$$

где константа в символе «O» зависит от функции f, но не от диаграммы Юнга λ.

Из предыдущей задачи следует, что утверждение леммы верно для функций $f = p_k^*(x_1, \ldots, x_N)$. Для произвольной функции f проведем рассуждение так: сначала выразим f как многочлен $f = Q(p_1^*, \ldots, p_N^*)$. Тогда $f_* = Q(p_1, \ldots, p_N)$, а значит, $(f_*)^\circ = Q(p_1^\circ, \ldots, p_N^\circ)$.

Остается воспользоваться следующим фактом.

Упражнение 10. Если неравенство 4 верно для двух многочленов $f, g \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_N]^{Sym*}$, то оно верно и для их суммы $f+g$ и произведения fg.

Доказательство леммы, а вместе с ней и леммы 2 и теоремы 5 на этом закончено.

□