Плотность полиномов в пространстве непрерывных функций: полиномы С. Н. Бернштейна

Задача 1. Пусть $0 < p < 1$ и $n \in N$. Вычислите сумму

$$\sum_{k=0}^{n} (k - np)^2 C_n^k.$$

Задача 2. Докажите, что существует такое $C > 0$, что для всякого p, где $0 < p < 1$, справедлива оценка

$$\sum_{\{k\colon \left|\frac{k}{n} - p\right| > \varepsilon\}} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \leq \frac{C}{n\varepsilon^2}.$$

Задача 3. Пусть f — непрерывная (вещественная) функция на отрезке $[0, 1]$. Определим многочлен $P_n(t)$ на отрезке $[0, 1]$ формулой

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) t^k (1-t)^{n-k}.$$

Докажите, что при $n \to \infty$ величина $\max_{t \in [0,1]} |f(t) - P_n(t)|$ стремится к нулю.

Задача 3 показывает, что любую непрерывную функцию на отрезке $[0, 1]$ можно равномерно (т. е. с любой точностью одновременно для всех точек отрезка) приблизить суммами многочленов вида $at^k(1-t)^l$, где $a \in \mathbb{R}$, а k, l — неотрицательные целые числа.