Задачи к курсу А. И. Буфетова, А. Н. Ващенко. Листок 3.

Тем, кто не встречался раньше первой лекции с понятием определителя, напомним определение:

$$\det(a_{ij})_{i,j=1}^N = \sum_{\sigma\in S_N} (-1)^{\operatorname{sgn}\sigma} a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\dots a_{N\sigma(N)}.$$

Кроме того, при решении следующей задачи полезно иметь в виду, что при перестановке любых двух строк или столбцов матрицы (a_{ij}) ее определитель меняет знак, а при прибавлении любой строки к любой другой с любым коэффициентом (или, аналогично, столбца) определитель остается неизменным. Тем, кто не знаком с этими свойствами, нетрудным упражнением будет вывести их из определения.

Напомним также обозначение: $x^{\downarrow m} = x(x-1)\dots(x-m+1)$ (мы считаем, что $m>0$, при $m=0$ мы объявили $x^{\downarrow m}=1$).

Задача 1. а) Докажите равенство

$$\det(x_i^{j-1})_{i,j=1}^N = (-1)^N \prod_{1\le i<j\le N}(x_i-x_j).$$

Определитель, стоящий в левой части, называется *определителем Вандермонда.*

б) Проверьте, что

$$s_\mu(x_1,\dots,x_N) = \frac{\det(x_i^{N-j+\mu_j})_{i,j=1}^N}{\det(x_i^{N-j})_{i,j=1}^N}.$$

в) Пусть $q_j, j=1,\dots,N$ — многочлены от одной переменной степени $j-1$ с единичным коэффициентом при старшем члене. Докажите равенство

$$\det(q_j(x_i))_{i,j=1}^N = (-1)^N \prod_{1\le i<j\le N}(x_i-x_j).$$

г) Вычислите определитель $\det((x_i+N-i)^{\downarrow(N-j)})_{i,j=1}^N$.

Задача 2. Пусть λ,μ — диаграммы Юнга, символ «0» обозначает диаграмму Юнга из одной клетки. Напомним, что через $\dim(\lambda,\mu)$ обозначается количество путей в графе Юнга, ведущих от диаграммы λ к диаграмме μ.

Выведите из формулы для числа путей, полученной в Теореме 3, равенство:

$$\frac{\dim(\mu,\lambda)}{\dim(0,\lambda)} = \frac{1}{n^{\downarrow m}} \cdot \frac{\det((\lambda_i + N - i)^{\downarrow(\mu_j+N-j)})_{i,j=1}^N}{\prod_{1\le i<j\le N}(\lambda_i - i + \lambda_j + j)}.$$

Утверждения следующих двух задач потребуются нам для доказательства теоремы 5 (а именно, они потребуются, чтобы оценить функции $p_k^\circ(\omega)$).

Задача 3. Проверьте равенство: $kc^{\downarrow(k-1)} = (c+1)^{\downarrow k} - c^{\downarrow k}$.

Задача 4. При $k \ge 2$ определим многочлен $p_k^*(x_1, x_2, \ldots)$ от конечного или бесконечного числа переменных формулой

$$p_k^*(x_1, x_2, \ldots) = \sum_{i=1}^{\infty} \left((x_i - i + 1)^{\downarrow k} - (-i+1)^{\downarrow k} \right).$$

Заметим, что $p_k^*(x_1, \ldots, x_N, x_{N+1}) \mid_{x_{N+1}=0} = p_k^*(x_1, \ldots, x_N)$. Предположим теперь, что λ — (обычная, конечная) диаграмма Юнга, и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — длины ее строк.

а) Докажите, что

$$p_k^*(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = k \sum_{(i,j)=\square\in\lambda} (j-i)^{k-1},$$

где суммирование в правой части ведется по всем клеткам диаграммы Юнга λ, парой (i,j) обозначаются номер строки и номер столбца.

б) Обозначим символом $a_i(\lambda)$ количество клеток в i-той строке диаграммы Юнга λ правее диагонали и символом $b_i(\lambda)$ количество клеток в i-том столбце диаграммы ниже диагонали. Проверьте, что

$$p_k^*(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{a_i(\lambda)}{n}\right)^k + (-1)^{k+1} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{b_i(\lambda)}{n}\right)^k + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Задача 5. а) Докажите, что $s_\mu(x_1, \ldots, x_N, x_{N+1}) \mid_{x_{N+1}=0} = s_\mu(x_1, \ldots, x_N)$.

Определим

$$s_\mu^*(x_1, \ldots, x_N) = \frac{\det((x_i + N - i)^{\downarrow(N-j+\mu_j)})_{i,j=1}^N}{\det((x_i + N - i)^{\downarrow(N-j)})_{i,j=1}^N}.$$

б) Проверьте, что функция $s_\mu^*(x_1, \ldots, x_N)$ является на самом деле многочленом.

в) Докажите, что $s_\mu^*(x_1, \ldots, x_N, x_{N+1}) \mid_{x_{N+1}=0} = s_\mu^*(x_1, \ldots, x_N)$.