БЕСКОНЕЧНЫЕ БАЗИСЫ

1. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ БАЗИСЫ

Задача 1. Пусть $a_1 + b_1\sqrt{2} + c_1\sqrt{3} = a_2 + b_2\sqrt{2} + c_2\sqrt{3}$, где $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ — рациональные числа. Докажите, что $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$.

Задача 2. Можно ли в задаче 1 заменить числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ а) на числа $2+\sqrt{2}$, $3-\sqrt{3}$? б) на числа $2+\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $3-\sqrt{2}-\sqrt{3}$? в) на $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$?

Задача 3. Многочлен $P(x)$ с комплексными коэффициентами равен нулю при всяком $x \in \mathbb{C}$. Докажите, что все его коэффициенты равны нулю.

Задача 4. а) Дано множество $B_n = \{1, 2, 4, \dots, 2^{n-1}\}$. Докажите, что для всякого натурального числа $k < 2^n$ найдется, и притом единственный, набор $b_1, \dots, b_s$ элементов B_n такой, что $k = b_1 + \dots + b_s$. б) Придумайте какое-нибудь множество $B'_n \subset \{1, 2, \dots, 2^n - 1\}$, отличное от B_n, но обладающее таким же свойством.

В любой задаче о базисе имеются *числа* и *векторы*. Числа можно складывать, умножать, вычитать и делить; при этом соблюдаются обычные свойства сложения и умножения (типа $a + b = b + a$ и $a(b + c) = ab + ac$; формально говоря, числа должны образовывать *поле* — определение можно найти в любом учебнике по "высшей алгебре"). Векторы можно складывать друг с другом, вычитать и умножать на числа, тоже с соблюдением ожидаемых свойств (типа $(a + b)v = av + bv$ или $1v = v$; здесь a, b — числа, а v — вектор; формально говоря, векторы образуют абелеву группу по сложению, а умножение на число является гомоморфизмом поля чисел в кольцо автоморфизмов этой группы; если последняя фраза непонятна — не страшно…). Пара "(числа, векторы)" называется векторным пространством.

Множество векторов B (конечное или бесконечное) называется базисом векторного пространства, если для всякого вектора v найдутся, и притом единственные, векторы $b_1, \dots, b_s \in B$ и числа $a_1, \dots, a_s$, отличные от нуля и такие, что $v = a_1b_1 + \dots + a_sb_s$. Разумеется, векторы b_i, числа a_i и даже само число s для разных векторов v будет различным.

Задача 5. Переформулируйте утверждения задач 1–4 как утверждения о базисах.

Указание. Задачу 3 можно понимать как два утверждения о базисах — о базисе (конечном) в пространстве многочленов степени не выше n, и о базисе (бесконечном) в пространстве всех многочленов.

В задаче 4 есть только два числа — 0 и 1; сложение осуществляется по правилу $1 + 1 = 0$. Векторы это числа $\{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$; при сложении векторов должно соблюдаться правило $x + x = (1 + 1)x = 0x = 0$ для всякого вектора x.

Теорема. *Во всяком векторном пространстве имеется базис. Если V — векторное пространство, $V' \subset V$ — его подпространство (т.е. подмножество, которое само является векторным пространством по отношению к* *тем же операциям сложения векторов и умножения их на число), B — базис в V, а B' — базис в V', то мощность базиса B' не больше, чем мощность базиса B (т.е. существует отображение $f : B' \to B$, переводящее различные элементы в различные).*

Следствие. *Любые два базиса одного и того же векторного пространства равномощны (между ними можно установить взаимно однозначное соответствие).*

Доказательство следствия. Пусть B и B' — два базиса в V. Положим $V' = V$, и пусть B' — базис в V'. Тогда согласно теореме мощность B' не превосходит мощности B. Симметричным образом, мощность B не превосходит мощности B'. По теореме Кантора–Бернштейна B и B' равномощны. □

В частности, если в пространстве имеется конечный базис, то любой другой базис содержит столько же векторов; если в пространстве имеется бесконечный базис, то не имеется конечного.

Доказывать теорему мы не будем.

Пусть теперь векторы это действительные числа, а числа — рациональные числа. Пусть B — какой-нибудь базис.

Задача 6. Докажите, что базис B обязательно бесконечный и несчетный.

Задача 7. Докажите, что существует базис B' такой, что а) $1 \in B'$, б) $1 \in B'$ и $\pi \in B'$, в) $1 \in B'$, $\pi \in B'$ и $\sqrt{2} \in B'$.

Указание. В задаче 7б воспользуйтесь тем, что $\pi \notin \mathbb{Q}$. В задаче 7в воспользуйтесь тем, что π не может удовлетворять квадратному (а на самом деле любому алгебраическому) уравнению с целыми коэффициентами.

Функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ назовем аддитивной, если она удовлетворяет равенству $f(x + y) = f(x) + f(y)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}$.

Задача 8. Докажите для аддитивной функции равенства а) $f(0) = 0$; б) $f(-x) = -f(x)$, для всех $x \in \mathbb{R}$; в) $f(n) = kn$, где $k \stackrel{\text{def}}{=} f(1)$, а n — произвольное целое число; г) $f(x) = kx$, где $k \stackrel{\text{def}}{=} f(1)$, а n — произвольное рациональное число.

Задача 9. Пусть B — базис действительных чисел над рациональными, и пусть для каждого $b \in B$ зафиксировано какое-то действительное число φ_b. Докажите, что существует и единственна аддитивная функция f, для которой $f(b) = \varphi_b$ для всех $b \in B$.

Следствие из задач 9 и 7б: существует аддитивная функция f такая, что $f(1) = k \neq 0$ и $f(\pi) = 0$.

Пусть M — многогранник (обычный, трехмерный), $\ell_1, \ldots, \ell_n$ — длины его ребер, а $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — величины (в радианах) прилегающих к ним двугранных углов. Рассмотрим величину $\varphi(M) = \sum_i \ell_i f(\varphi_i)$, где f — описанная только что аддитивная функция.

Задача 10. Докажите, что если многогранник M разрезать (плоским разрезом) на две части, M_1 и M_2, то $\varphi(M) = \varphi(M_1) + \varphi(M_2)$.

Задача 11. а) Пусть M — куб единичного объема. Докажите, что $\varphi(M) = 0$. б) Придумайте тетраэдр T единичного объема такой, что $\varphi(T) \neq 0$.

Указание. В задаче 11б подойдет правильный тетраэдр. Для доказательства его двугранный угол и возьмите за образец задачу 7в.

Из задачи 10 теперь вытекает, что куб M нельзя разрезать на конечное количество частей-многогранников и сложить из них впоследствии тетраэдр T.