БЕСКОНЕЧНЫЕ БАЗИСЫ

2. НОРМЫ

Мы будем рассматривать векторные пространства V, в которых числа это обычные действительные числа.

Задача 1. а) Последовательность $(x_1, x_2, \dots)$ называется финитной, если она содержит только конечное количество отличных от нуля чисел. Пусть $\mathbb{R}^\infty_{\mathrm{fin}}$ — векторное пространство всех финитных последовательностей (с почленным сложением и умножением на число). Постройте в $\mathbb{R}^\infty_{\mathrm{fin}}$ базис. Является ли он счетным? б) Докажите, что базис пространства $C[0,1]$ непрерывных функций $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ несчетный. в) Пусть $\mathbb{R}^\infty$ — пространство всех последовательностей действительных чисел. Счетный ли в нем базис? г) Тот же вопрос про пространство $\mathbb{R}^\infty_{\mathrm{b}}$ всех *ограниченных* последовательностей действительных чисел.

Функция $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ называется *нормой вектора*, если она обладает такими свойствами:

1) Норма всех векторов, кроме нулевого, строго положительна, а у нулевого — равна нулю: $\|v\| = 0 \Longleftrightarrow v = 0$.
2) Норма положительно однородна степени 1: $\|\alpha v\| = |\alpha|\ \|v\|$.
3) Норма суммы не превосходит суммы норм: $\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$.

Пример 1. Нормы в пространстве $\mathbb{R}^n$, элементы которого — последовательности $x = (x_1, \dots, x_n)$ вещественных чисел (сложение и умножение на число — почленные): $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$, $\|x\|_\infty = \max_{i=1}^n |x_i|$.

Задача 2. Проверьте, что в примере 1 действительно определены нормы. Нарисуйте при $n = 2$ и $n = 3$ для каждой их этих норм множество $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$.

Ответ. При $n = 3$ имеем: Ω_∞ — куб с центром в начале координат и ребрами длиной 2, параллельными координатным осям; Ω_2 — единичный шар с центром в начале координат; Ω_1 — правильный октаэдр с центром в начале координат и вершинами в концах единичных векторов, направленных вдоль осей координат.

Задача 3. Докажите, что: а) Функция $\|v\|$ — норма тогда и только тогда, когда функция $\varrho(x,y) = \|x - y\|$ — метрика (расстояние) на V, обладающее свойством однородности: $\varrho(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|\ \varrho(x,y)$. б) Единичный шар $\Omega = \{v \mid \|v\| \leq 1\}$ — выпуклое центрально симметричное множество, пересечение которого с произвольной проходящей через начало координат прямой $\ell = \{\alpha v \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ — отрезок (не вырождающийся в точку). в) Для всякого выпуклого центрально симметричного множества, пересекающего произвольную проходящую через начало координат прямую по отрезку, существует и единственна норма, в которой это множество — единичный шар.

Задача 4*. Докажите, что для всякого $p \geq 1$ функция $|v|_p = \left(|v_1|^p + \cdots + |v_n|^p\right)^{1/p}$ является нормой на $\mathbb{R}^n$. Опишите единичный шар в этой норме. Что происходит при $p = 1$ и при $p \to \infty$?

Еще примеры векторных пространств с нормами:

Пример 2. Пространство $\mathbb{R}^\infty_{\mathrm{fin}}$ финитных последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$ (см. задачу 1а). Норма $\|x\| = \max_i |x_i|$.

Пример 3. То же самое пространство, но норма $\|x\| = \sum_i |x_i|$.

Пример 4. Пространство $\mathbb{R}^\infty_{\mathrm{b}}$ ограниченных последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots,)$ (см. задачу 1г). Норма $\|x\| = \sup_i |x_i|$, т.е. $\|x\|$ это наименьшее действительное число, превосходящее (строго или нестрого) все члены последовательности. Напомним, что у каждой ограниченной последовательности такое число существует.

Пример 5. Пространство $C[0,1]$ непрерывных функций (см. задачу 1б) на отрезке $[0,1]$. Норма $\|f\| \stackrel{\mathrm{def}}{=} \max_{t\in[0,1]} |f(t)|$. Напомним, что всякая непрерывная на отрезке функция достигает своего наибольшего значения, так что норма корректно определена.

Задача 5. Проверьте свойства нормы в примерах 2–5.

Говорят, что последовательность векторов $v_1, v_2, \dots,$ в пространстве V с нормой сходится к вектору v по норме, если $\lim_{n\to\infty} \|v_n - v\| = 0$.

Говорят, что последовательность векторов $v_1, v_2, \dots,$ в пространстве V с базисом B сходится к вектору v по этому базису, если $\lim_{n\to\infty} \alpha_{b,n} = \alpha_b$ для любого базисного вектора b; здесь $\alpha_{b,n}$ это координаты вектора v_n по базису ($v_n = \sum_{b\in B} \alpha_{b,n} b$), а α_b — координаты вектора v ($v = \sum_{b\in B} \alpha_b b$).

Пример 6. Пусть $B = (e_1, e_2, \dots)$ — базис в пространстве $\mathbb{R}^\infty_{\mathrm{fin}}$. Последовательность $f_1 = e_1, f_2 = e_1 + e_2, f_3 = e_1 + e_2 + e_3, \dots$ не сходится к нулю по базису B, поскольку $r_{k,n} = 1$ при любом $n \geq k$. В то же время $B' = (f_1, f_2, \dots)$ — также базис в $\mathbb{R}^\infty_{\mathrm{fin}}$ (докажите!). По базису B' последовательность сходится к нулю: здесь $r'_{k,n} = 0$ для всякого $n \neq k$. Таким образом, в бесконечномерном пространстве понятие сходимости по базису может зависеть от базиса.

Задача 6. а) Докажите, что произвольная норма в $\mathbb{R}^n$ — непрерывная функция: если $|v_n - v| \to 0$ (где $|\cdot|$ — обычное расстояние), то $\|v_n - v\| \to 0$ (где $\|\cdot\|$ — исследуемая норма). б) Докажите, что для нормы $\|\cdot\|$ существуют положительные константы c и C такие, что $c\,|v| \leq \|v\| \leq C\,|v|$ для любого вектора $v \in \mathbb{R}^n$.

Указание. Воспользуйтесь следующим свойством обычной сферы $S \subset \mathbb{R}^n$ (вытекающим из ее компактности): если $f : S \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, то она достигает на S максимума и минимума: найдутся точки $a_*, b_* \in S$ такие, что $f(a_*) \leq f(x) \leq f(b_*)$ для всех $x \in S$.

Задача 7. Пусть V — конечномерное пространство, в котором заданы две нормы, $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$. а) Докажите, что найдется константа $C > 0$ такая, что для каждого вектора v выполнено неравенство $\|v\|_1 \leq C\,\|v\|_2$. б) Пусть $v_n \to v$ по норме $\|\cdot\|_1$. Докажите, что $v_n \to v$ по норме $\|\cdot\|_2$.

Задача 8. Предположим, что в конечномерном пространстве V заданы и норма, и базис. а) Пусть $v_n \to v$ по норме. Докажите, что $v_n \to v$ по базису. б) Пусть $v_n \to v$ по базису. Докажите, что $v_n \to v$ по норме.

Тем самым понятие сходимости по норме в конечномерном пространстве не зависит от выбора нормы и совпадает с понятием сходимости по базису. Следовательно, понятие сходимости по базису в конечномерном пространстве не зависит от выбора базиса (пример 6 в конечномерном пространстве невозможен).

Известное свойство последовательностей действительных чисел: ограниченная последовательность имеет частичный предел, т.е. из нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность

Задача 9. Пусть $v_1, v_2, \dots$ — последовательность векторов в конечномерном пространстве V с нормой, причем числовая последовательность $\|v_1\|, \|v_2\|, \dots$ ограничена. Докажите, что последовательность $v_1, v_2, \dots$ имеет частичный предел.

Известное свойство непрерывных функций: функция, непрерывная на отрезке, достигает своего наибольшего значения.

Задача 10*. Определите понятие функции, непрерывной в векторном пространстве V с нормой. Докажите, что если V конечномерно, то функция, непрерывная на множестве $\{v \in V \mid \|v\| = 1\}$, достигает на нем наибольшего значения.

Задача 11. а) Приведите пример последовательности $v_1, v_2, \dots$ векторов пространства примеров 2 и 3, сходящейся к нулю по норме примера 2, но расходящейся по норме примера 3. б) Приведите пример последовательности $v_1, v_2, \dots$ векторов того же пространства, сходящейся к нулю по какому-нибудь базису, но расходящейся в обеих нормах.

Тем самым показано, что в бесконечномерном пространстве понятие сходимости по норме не совпадает со сходимостью по базису и может зависеть от нормы.

Задача 12*. В бесконечномерном пространстве V задана норма. Последовательность v_n стремится к нулю по норме. Обязательно ли она стремится к нулю по базису?

Задача 13. а) Приведите пример последовательности $v_1, v_2, \dots$ векторов пространства примера 2, не имеющей частичного предела. б) Тот же вопрос про примеры 3, 4 и 5.

Задача 14*. Приведите пример функции, непрерывной на множестве $\{v \mid \|v\| = 1\}$ пространств примеров 2, 3, 4 и 5, и а) неограниченной, б) ограниченной, но не достигающей своего наибольшего значения.