Вводные сведения из комплексного анализа, версия от 21 июля 2008 г.

Этот текст — изложение вводных сведений из комплексного анализа (которые понадобятся нам в дальнейшем), сформулированных частично в виде "информации к сведению", а частично в виде задач. Если у вас не хватает времени на их решение — по крайней мере, их можно просто прочесть и поверить в сделанные утверждения. Поскольку цель этого текста — создать впечатление и ощущение от предмета, то заметная часть формулировок и вводимых определений ни в коей мере не являются строгими, и воспринимать их нужно соответственно — как "задание идей".

Конформные преобразования

Мы по умолчанию предполагаем, что все объекты, с которыми мы работаем — "хорошие". Так что в дальнейшем мы гладкость, если явно не оговорено противное, предполагаем по умолчанию.

Цель этого листка — познакомить слушателей с понятием конформного отображения, некоторыми свойствами таких отображений и их применением.

Определение. Пусть две кривые пересекаются в точке P. *Углом* (в этой точке[1]) между ними называется угол между касательными к ним в этой точке.

Определение. Отображение f из области в $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ называется *конформным*, если оно сохраняет углы между кривыми.

Начиная с этого момента мы работаем на плоскости $\mathbb{R}^2$, которую естественно отождествляем с $\mathbb{C}$, а все отображения предполагаем сохраняющими ориентацию.

1. Докажите, что *линейное* сохраняющее ориентацию отображение плоскости есть композиция поворота и гомотетии.

2. Докажите, что линейное отображение l есть композиция поворота и гомотетии тогда и только тогда, когда в $\mathbb{C}$-интерпретации оно является умножением на ненулевое комплексное число, т.е. для некоторого $a \in \mathbb{C}^*$ имеем $l(z) = az$.

3. Докажите, что отображение конформно тогда и только тогда, когда его линейная часть в любой точке конформна.

[1] Вообще говоря, кривые могут пересекаться в нескольких точках.

Определение. Отображение $f : D \to \mathbb{C}$, где D — область в $\mathbb{C}$, называется *комплексно-дифференцируемым* в точке $z_0 \in D$, если существует предел

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Этот предел (если он существует) называется *(комплексной) производной* f в точке z_0 и обозначается $f'(z_0)$.

Обратите внимание, что это не тоже самое, что вещественная дифференцируемость f как функции двух переменных: пределы, скажем, при подходе по вещественной и по мнимой оси должны быть одинаковы.

4. (Условие Коши-Римана) Поймите, что если вещественно-дифференцируемая функция $f(x, y)$ будет комплексно-дифференцируемой как $f(x + iy)$, то $\frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x}$. (На самом деле, верно и обратное.)

Определение. Если функция комплексно-дифференцируема в каждой точке некоторой области, то говорят, что она *голоморфна* в этой области.

5. (Условие Коши-Римана-2) Поймите, что вещественно-гладкое отображение комплексно-дифференцируемо тогда и только тогда, когда его линейная часть есть умножение на комплексное число — его производную.

6. Выведите из всего предыдущего, что отображение конформно в некоторой области, если и только если оно в этой области голоморфно, и его производная не обращается в ноль.

К сведению. Голоморфные отображения бесконечно дифференцируемы. Более того, они *аналитичны* — ряд Тейлора такой функции в достаточно малой окрестности сходится к ней, так что локально её можно представить как сумму сходящегося степенного ряда.

Итак, мы выяснили, что конформные и комплексно-дифференцируемые отображения суть одно и то же. В частности, поскольку всё, что можно выписать аналитической записью без операций модуля и взятия вещественной/мнимой части (сумма, разность, произведение, частное, синус, экспонента, и т. д.), как функцию от переменной z, будет комплексно-дифференцируемым, такое отображение будет конформным (там, где его производная не обращается в ноль).

Оказывается, что с конформной точки зрения есть только одна односвязная (“без дырок”) область, являющаяся строгим подмножеством $\mathbb{C}$:

Теорема 1 (Римана об униформизации[2]). *Пусть задана односвязная область $U \subset \mathbb{C}$, $U \neq \mathbb{C}$. Тогда существует конформное взаимно-однозначное преобразование U на единичный круг $D_1 = \{z : |z| < 1\}$.*

К сведению. Сама комплексная плоскость единичному кругу не эквивалентна.

Вот пример, явно предъявляющий такое преобразование в случае верхней полуплоскости:

7. Отображение $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ конформно отображает верхнюю полуплоскость $\Pi_+ = \{z \mid Im\, z > 0\}$ в единичный круг $D_1 = \{z : |z| < 1\}$.

8. Композиционное частное двух конформных отображений из U в D_1 есть конформный автоморфизм единичного диска D_1.
К сведению. Все конформные автоморфизмы как единичного диска, так и верхней полуплоскости дробно-линейны. Дробно-линейные автоморфизмы верхней полуплоскости имеют вид

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d},$$

где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и $ad - bc > 0$. Поскольку четвёрка a, b, c, d определена с точностью до одновременного умножения на ненулевую константу, группа автоморфизмов получается трёхмерной.
К сведению. Если область U достаточно хорошая, её конформное отображение в диск непрерывно продолжается на границу. Далее, "доворачивая" получившееся отображение автоморфизмом диска, можно перевести любые три точки на границе U в любые три точки на границе D_1, расположенные в том же циклическом порядке (что доказывают следующие несколько задач).

Определение. *Двойным отношением четырёх точек $x, y, z, w \in \mathbb{C}$* называется выражение

$$[x, y; z, w] := \frac{x-z}{y-z} : \frac{x-w}{y-w}$$

9. Убедитесь, что дробно-линейные отображения сохраняют двойное отношение: для любого дробно-линейного отображения f и любых $a, b, c, d \in \mathbb{C}$

$$[x, y; z, w] = [f(x), f(y); f(z), f(w)]$$

[2]См. лекцию И.В. Ященко

Указание. Проверьте, что всякое дробно-линейное отображение представляется в виде композиции аффинных отображений $z \mapsto az + b$ и отображения $z \mapsto 1/z$.

10. Проверьте, что отображение $z \mapsto [a, b; c, z]$ является дробно-линейным отображением, переводящим точки a, b и c в точки 0,∞ и 1 соответственно.

11. Любые три точки на границе верхней полуплоскости могут быть дробно-линейным преобразованием, сохраняющим верхнюю полуплоскость переведены в любые другие три точки, идущие в том же циклическом порядке.

Конформные отображения полезны при решении конформно-инвариантных задач: чтобы решить такую задачу в какой-то кривой (но односвязной!) области, можно сначала эту область перевести в единичный диск, решить получившуюся задачу там, а потом принести ответ обратно.

12. Переведите конформно в круг (или в верхнюю полуплоскость) следующие области:

- Первый квадрант $\{x + iy \mid x, y > 0\}$.
- Плоскость без положительной полуоси $\{z \mid z \notin [0, +\infty)\}$.
- Верхнюю полуплоскость с разрезом $\{z \mid Im\, z > 0,\ z \notin [0, i]\}$.

К сведению. На самом деле, как мы уже видели, конформные преобразования в размерности 2 “дружат” с оператором Лапласа, а тот, в свою очередь, с броуновским движением. Поэтому (в определённом смысле!) верно следующее: *в размерности* 2 *конформные преобразования переводят траектории броуновского движения в траектории броуновского движения.*