Листок 2
Задачи к курсу В.А. Клепцына — лекция 3

Определение. Пусть задано конечное множество K (*конфигурационное пространство*, или *пространство состояний*) и функция $H : K \to \mathbb{R}$, называемая *энергией*. *Распределением Гиббса* с температурой $T > 0$ называется распределение вероятностей на K, при котором вероятность $p(x)$ состояния $x \in K$ пропорциональна $e^{-\frac{H(x)}{T}}$. Иными словами,

$$p(x) = \frac{1}{Z(T)}\, e^{-\frac{H(x)}{T}};$$

величина $Z(T)$ при этом называется *статистической суммой*.

Задача 1. Чему равно $Z(T)$?
(Указание: сумма вероятностей должна равняться единице).

Зачастую энергия системы бывает определена лишь с точностью до прибавления константы (поскольку потенциальная энергия определена лишь с точностью до выбора начала отсчёта — нулевой линии уровня).

Задача 2. Как изменяется распределение при замене $H(x)$ на $H(x)+C$?

Задача 3. Опишите, что происходит при $T = 0$? При $T = \infty$?

В следующей задаче мы рассматриваем "заготовку" для одномерной модели Изинга: n атомов на прямой, каждый из которых может находиться в одном из двух состояний, "0" или "1".

Задача 4. a) Каково в этом случае конфигурационное пространство K? Сколько в нём элементов?

b) Пусть атомы не взаимодействуют, но состояние 0 более энергетически выгодно, чем 1:

$$H(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j.$$

Микроскопический подход: какое состояние наиболее вероятно?

c) Пусть $S := x_1 + \cdots + x_n$ — число атомов в состоянии 1.
Макроскопический подход: найдите, с какой вероятностью S принимает какое значение. Какое из значений наиболее вероятно? Сильно ли его вероятность отличается от вероятностей соседних значений?

d) Почему ответы про вероятные значения в двух предыдущих пунктах так отличаются?

e) Рассмотрим распределение на $K = \{0,1\}^n$, для которого вероятность $p(x_1, \ldots, x_n)$ пропорциональна

$$q^{\#\{j=1,\ldots,n | x_j=1\}},$$

где $q > 1$. Докажите, что это распределение Гиббса при некоторой температуре T; чему равна эта температура?

Рассмотрим теперь настоящую одномерную модель Изинга: пусть

$$H(x_1, \ldots, x_n) = \#\{j = 1, \ldots, n-1 \mid x_j \neq x_{j+1}\}$$

(теперь состояния равноправны, но есть взаимодействие между соседними атомами).

Задача 5. Пусть крайний правый атом x_n зафиксирован в положении “1” (т.е., мы рассматриваем подмножество конфигурационного пространства с этим ограничением, изменяя соответственно нормировку для вероятностей). Как ведёт себя при $n \to \infty$ (температура $T > 0$ постоянна) вероятность того, что в том же состоянии будет находиться и крайний левый атом, x_1?

Указание. Рассмотрите вместо состояний самих атомов переходы между соседями, и вспомните про предыдущую задачу.

Более технически сложная, но не содержащая новых идей, следующая задача утверждает: в одномерной модели Изинга намагничивание невозможно ни при какой температуре.

Задача 6*. Пусть на прямой есть $2n+1$ атом с возможными состояниями “0” и “1”, причём состояния двух крайних атомов фиксированы, $x_{-n} = x_n = 1$. Энергия взаимодействия, как и раньше,

$$H(x_{-n}, \ldots, x_n) = \#\{j = -n, \ldots, n-1 \mid x_j \neq x_{j+1}\}$$

Найдите при фиксированной температуре $T > 0$ предел при $n \to \infty$ вероятности того, что $x_0 = 1$.

Указание. Рассмотрите по отдельности число соседних пар атомов в различных состояниях на левой и на правой половинах отрезка.