

Задачи к курсу «Бильярды и барабаны»

ЛШСМ-2008, Кудряшов Ю.

Задача 1. Сколько замкнутых траекторий периода n (с точностью до естественной эквивалентности) существует в следующих бильярдах: прямоугольник; окружность; правильный треугольник; правильный шестиугольник; треугольник с углами 90° , 45° , 45° ; треугольник с углами 90° , 30° , 60° .

Задача 2. Рассмотрим бильярд в эллипсе. Доказать, что траектория, вылетевшая по касательной к некоторому софокусному эллипсу, и дальше будет его касаться.

Задача 3. Доказать, что для любого бильярдного стола любую периодическую траекторию периода 2 можно разрушить малым шевелением.

Задача 4 (Теорема Биркгофа). Доказать, что в любом гладком выпуклом бильярде найдётся замкнутая траектория любого периода.

Задача 5. (а) Проверить, что функция вида $u(x, t) = f(x + at) + g(x - at)$, где f и g — произвольные функции, удовлетворяет уравнению колебаний струны $u''_{tt} = a^2 u''_{xx}$.

(б) Доказать, что любое решение уравнения колебаний струны имеет вид $u(x, t) = f(x + at) + g(x - at)$.

Задача 6. В начальный момент времени бесконечную в обе стороны струну отклонили так, что она приняла форму $u(x, 0) = \varphi(x)$, и отпустили с нулевой начальной скоростью. Какова будет форма струны через время t ?