

# О ШАРНИРНЫХ МЕХАНИЗМАХ, ПРУЖИННЫХ ГРАФАХ И ВЫВЕРНУТЫХ НАИЗНАНКУ МНОГОГРАННИКАХ

Панина Г.Ю.

И молвил Морж: "Пришла пора  
Подумать о делах:  
О башмаках и сургуче,  
Капuste, королях,  
И почему, как суп в котле,  
Кипит вода в морях".

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Эта статья объединяет на первый взгляд необъединяемые понятия и задачи. Ну что может быть общего у конструкции из натянутых пружинок и гладкого выпуклого тела? Или у складного метра и седловой поверхности? Чем связаны конфигурации непересекающихся больших полуокружностей на сфере (кстати, это весьма нетривиальный комбинаторный объект) и жесткий шарнирный механизм?

Дело в том, что все перечисленное (и многое другое) – составные части недавно найденных решений двух авторитетных геометрических задач (которые, впрочем, тоже очень непохожи друг на друга). Эти задачи – наиболее яркие (но не единственные) представители двух математических теорий – теории псевдотриангуляций и теории гиперболических виртуальных многогранников. Развитие этих теорий вовсе не кончилось с решением этих задач, а наоборот, получило новый толчок.

Вот эти задачи:

**Задача о складном метре (carpenter's rule problem).** *Рассмотрим на плоскости ломаную без самопересечений. Представлять ее себе надо как шарнирный механизм, т. е. набор жестких планок, соединенных шарнирами. В местах соединения возможны свободные движения. Типичный пример такой ломаной – складной метр, которыми пользуются плотники, однако в нашей задаче мы не накладываем никаких ограничений ни на длины сторон ломаной, ни на их число.*

*Вопрос ставится так: всякий ли складной метр возможно выпрямить, если разрешается двигать его только в плоскости и запрещаются самопересечения и касания?*

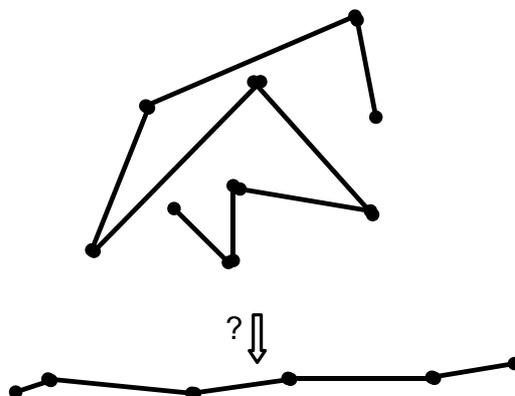


Рис. 1. Распрямление складного метра

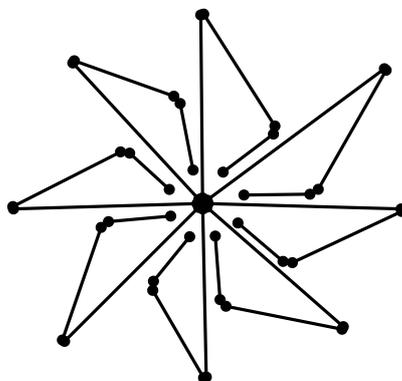


Рис. 2. Нераспрямляемый паучок

Задача была поставлена в 1970 году Сью Уайтсайдс, и оставалась открытой в течение 30 лет. Несмотря на кажущуюся так называемую "олимпиадность" и простоту, задача не имеет элементарного решения.

Впервые возможность распрямления была установлена Эриком Демэном, Робертом Коннелли и Гюнтером Роте в 2000 году, однако в этой статье мы изложим красивый алгоритм распрямления, принадлежащий Илеане Стрейну (см. [8]).

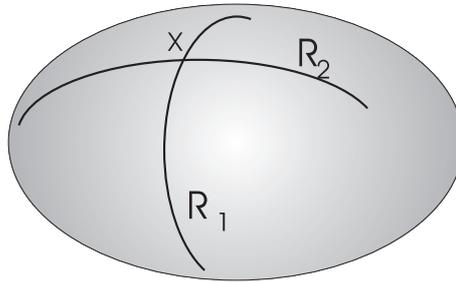


Рис. 3. Главные радиусы кривизны

Чтобы понять тонкость вопроса, давайте заменим в этой задаче "складной метр" на "шарнирный механизм, реализующий граф-дерево". Всякое ли дерево можно распрямить?

На этот вопрос ответ отрицательный. Например, у паучка (см. рис. 2) невозможно распрямить ноги, избегая при этом самопересечений и оставаясь в плоскости.

Интересно, что этот паучок какое-то время вдохновлял попытки математиков построить нераспрямляемый складной метр – пытались построить ломаную, обходящую дважды по контуру паучка.

**Задача 1.1.** *Как распрямить складной метр (изначально лежащий в плоскости), если разрешены движения в трехмерном пространстве?*

**Задача 1.2.** *Всякий ли складной метр, лежащий в трехмерном пространстве, можно распрямить? (Его можно двигать в трехмерном пространстве, но опять без самопересечений.)*

**Гипотеза Александра Даниловича Александрова.** *Пусть  $K$  – трехмерное гладкое выпуклое тело. Если существует такая константа  $C$ , что в каждой точке поверхности  $\partial K$  тела  $K$  выполнено неравенство  $R_1 \leq C \leq R_2$ , то тело  $K$  – шар радиуса  $C$ . ( $R_1$  и  $R_2$  обозначают главные радиусы кривизны  $\partial K$ ).*

Поясним возникающие здесь понятия. Рассмотрим плоскость  $e$ , проходящую через точку  $x \in \partial K$  и ортогональную  $\partial K$  в точке  $x$  (такая плоскость не единственна). Теперь рассмотрим окружность, максимально точно приближающую кривую пересечения  $\partial K \cap e$  в точке  $x$  (см. рис. 3). Радиус приближающей окружности зависит, разумеется, от выбора плоскости  $e$ . Дифференциальная геометрия говорит нам, что среди всех таких плоскостей  $e$  есть две, для которых радиусы приближающих окружностей максимален и минимален. Они называются главными радиусами кривизны поверхности  $\partial K$  в точке  $x \in \partial K$ . Впрочем, может случиться и так, что максимальный радиус совпадает с минимальным – например, для шара радиуса  $C$  любая такая плоскость  $e$  дает в пересечении с  $\partial K$  окружность радиуса  $C$ .

Предыстория проблемы здесь такова.

В 1938 году А.Д. Александров доказал эту гипотезу для аналитических тел (т. е. для очень гладких тел, таких, которые задаются функцией, которая не только бесконечно дифференцируема, но и раскладывается в ряд.) Открытым оставался вопрос: а справедлива ли гипотеза, если отказаться от аналитичности и потребовать, скажем, только дважды дифференцируемость.

Долгое время специалисты верили в справедливость гипотезы, однако были получены на удивление лишь очень частные результаты. Теперь ясно, почему – ведь гипотеза неверна, а никто не пытался построить контрпример.

Прошло много лет, и вот в 2001 году, вопреки ожиданиям, французский математик Ив Мартинес-Мор построил контрпример к гипотезе (см. [5]).

В этой статье мы покажем, что контрпримеров существует очень много, и поймем, что они существенно разные (см. [6, 7]). В этом нам поможет метод, приведший, как ни странно, к решению задачи о складном метре.

Объединяющая идея обеих задач такова: мы будем изучать и использовать геометрические объекты, являющиеся МАКСИМАЛЬНО НЕВЫПУКЛЫМИ. Это невыпуклые графы на плоскости, невыпуклые графы на сфере и гиперболические виртуальные многогранники.

Цель статьи – дать общее представление о взаимосвязи математических объектов, доступное студентам-младшекурсникам, опустив при этом технические подробности. Мы постарались сделать упор на описание конструкций и соответствий. Поэтому некоторые доказательства мы либо опускаем, либо выносим в решения задач.

## 2. ГРАФЫ НА ПЛОСКОСТИ. ТРИ ИПОСТАСИ.

*Графом* мы будем называть пару  $G = (V, E)$ , где  $V$  – некоторое конечное множество (множество вершин графа), а  $E$  – множество неупорядоченных пар различных вершин (множество ребер графа). Для удобства будем считать, что  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ . На протяжении всей статьи  $n$  – число вершин графа, а  $m$  – число его ребер.

Мы описали здесь граф как комбинаторный объект. Теперь давайте реализуем его геометрически.

*Геометрическим графом на плоскости* будем называть пару  $(G, p)$ , состоящую из графа  $G$  и инъективного отображения  $p : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Это отображение показывает, где именно на плоскости нужно поставить вершины графа. При этом удобно представлять себе ребра как прямолинейные отрезки, соединяющие вершины. Как правило, мы будем считать, что геометрический граф является *вложенным*, то есть ребра не пересекаются по внутренним точкам.

Мы считаем, что на плоскости  $\mathbb{R}^2$  зафиксирована декартова система координат  $(x, y)$ . Точки  $\mathbf{p}_i = p(i)$  (вершины геометрического графа) будем отождествлять с их радиус-векторами.

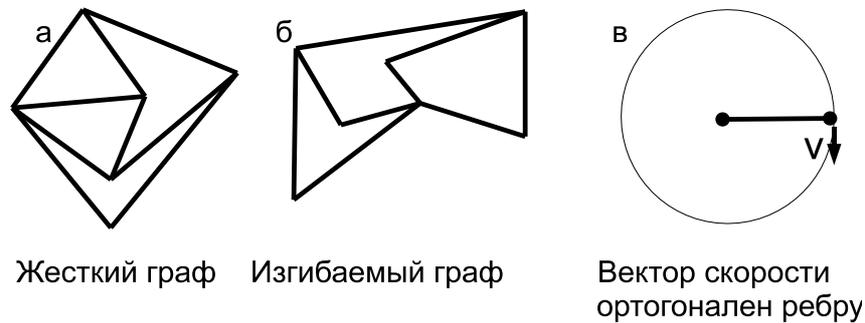


Рис. 4

Геометрический граф можно изучать с трех точек зрения, чем мы сейчас и займемся.

**Первая ипостась: изгибаемые шарнирные механизмы, инфинитезимальные движения.** Посмотрим на геометрический граф  $(G, p)$  как на шарнирный механизм, у которого жесткие планки (ребра) соединены в вершинах  $p_i$  шарнирами. Складной метр – частный случай такого шарнирного механизма.

Граф  $(G, p)$  называется *изгибаемым*, если существует непрерывное изменение положений вершин (то есть, непрерывное изменение отображения  $p$ ), сохраняющее длины ребер. Мы требуем, чтобы при таком движении обязательно менялось расстояние между какой-то парой вершин. Это нужно для того, чтобы исключить так называемые *тривиальные изгибания*, при которых шарнирный механизм движется как одно жесткое целое.

Читатель без труда приведет примеры изгибаемых графов, а также графов, не являющихся изгибаемыми, т. е. *жестких*.

Изучать изгибания графа напрямую – сложная задача. Чтобы в этом убедиться, стоит заглянуть на сайт [www.etudes.ru](http://www.etudes.ru) и посмотреть, насколько сложны бывают конфигурационные пространства шарнирных механизмов даже с небольшим количеством звеньев. Это не удивительно, ведь условие сохранения длины ребра задает некоторое квадратное уравнение, для каждого ребра – свое. Систему квадратных уравнений в общем виде никто решать не умеет, но зато люди давно разобрались с линейными системами. Поэтому попробуем свести задачу к линейным уравнениям.

Для этого будем искать не все изгибание в целом, а мгновенные скорости вершин графа при предполагаемом изгибании.

**Определение 2.1.** *Инфинитезимальным изгибанием* геометрического графа  $(G, p)$  называется отображение  $v : V \rightarrow \mathbb{R}^2$  (оно приписывает каждой

вершине  $\mathbf{p}_i$  вектор скорости  $\mathbf{v}_i$ ) такое, что для каждого ребра  $(i, j) \in E$  верно  $(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) = 0$ . Здесь и далее имеется ввиду скалярное произведение.

Инфинитезимальное изгибание называется *тривиальным*, если оно порождено движением шарнирного механизма как одного жесткого целого.

Для нетривиального изгибания для некоторой пары вершин, не соединенных ребром,  $(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \neq 0$ .

Граф называется *инфинитезимально изгибаемым*, если у него существует нетривиальное инфинитезимальное изгибание.

**Пример 2.2.** Рассмотрим шарнирный механизм (см. рис. 4 в), состоящий из двух вершин и одного ребра. Закрепим одну из вершин. Если вторая вершина будет двигаться по окружности вокруг первой, то ее вектор скорости ортогонален ребру. Именно это свойство (для концов одного ребра относительная скорость одного из них ортогональна ребру) и закодированно в определении 2.1.

Мы оставим за рамками статьи вопрос о том, как из системы инфинитезимальных (т.е. бесконечно малых) изгибаний собрать обычное движение шарнирного механизма. Подробно об этом (и вообще о шарнирных механизмах) написано в [3].

Начиная с этого места мы будем говорить только об инфинитезимальных изгибаниях, опуская при этом термин "инфинитезимальный" для краткости.

Изгибания геометрического графа  $(G, p)$  образуют некоторое векторное пространство  $F$  (от английского "flex", что означает "изгибание"), содержащее подпространство тривиальных изгибаний. Размерность последнего равна трем, поэтому граф изгибаем тогда и только тогда, когда  $\dim F > 3$ .

Согласно определению, инфинитезимальное изгибание задается системой линейных уравнений ( $m$  уравнений с  $n$  неизвестными, причем неизвестными являются вектора на плоскости, то есть двумерные объекты).

Матрица этой системы  $R$  выглядит так: в строчке, соответствующей ребру  $(i, j)$ , все элементы, за исключением двух, равны нулю. Только на  $i$ -том и на  $j$ -том местах стоят  $\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j$  и  $\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i$  соответственно.

$$R = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j & 0 & \dots & 0 & \mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \end{pmatrix}$$

Вообще говоря, действуя строго по правилам, надо бы вместо столбца с номером  $i$ , поставить два столбца, в которых записать  $x$ - и  $y$ - координаты вектора  $\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j$ , но мы позволим себе для компактности такую векторную запись. При этом надо помнить, что число неизвестных векторов равно  $n$ , а значит, число неизвестных чисел (т. е.  $x$ - и  $y$ - координат этих векторов) равно  $2n$ .

Зафиксируем (комбинаторный) граф  $G$  и будем рассматривать его разные геометрические реализации  $p$ .

Нас интересует размерность ядра линейного отображения, задаваемого матрицей  $R$ . Вообще говоря, она зависит от  $p$ . Как известно из линейной алгебры,

**Замечание 2.3.**  $\dim F = 2n - \text{rank } R$

Общая теория учит нас, что чтобы найти ранг матрицы, надо найти ее максимальный (по размеру) ненулевой минор. Легко видеть, что в нашем случае все миноры – некоторые многочлены от переменных  $\mathbf{p}_i$ . А всякий многочлен либо тождественно равен нулю, либо почти нигде в нуль не обращается.

Следовательно, либо все геометрические реализации  $p$  фиксированного графа  $G$  изгибаемы, либо почти все геометрические реализации жесткие.

Поэтому имеет смысл говорить о жесткости графа как комбинаторного объекта:

**Определение 2.4.** Граф называется *жестким*, если жесткими являются почти все его геометрические реализации.

Граф называется *минимальным жестким*, или *ламановым*, если он жесткий, причем удаление любого его ребра дает изгибаемый граф.

**Задача 2.5.** Придумайте жесткий граф, имеющий инфинитезимально изгибаемую геометрическую реализацию.

**Вторая ипостась: пружинные графы, стрессы.** Теперь посмотрим на граф совсем с другой точки зрения. Представим себе геометрическую реализацию графа как систему пружин, соединенных между собой в вершинах графа. Каждое ребро заменено на пружинку, причем какие-то пружинки сжаты, какие-то – растянуты, какие-то нейтральны (ни сжаты, ни растянуты). Потребуем при этом, чтобы такая система пружин находилась в равновесии, то есть сумма сил, приложенных к каждой вершине равнялась нулю. Вот формальное определение:

**Определение 2.6.** *Стрессом* геометрического графа  $(G, p)$  называется функция  $s : E \rightarrow \mathbb{R}$  такая, что

$$\forall i \quad \sum_{(i,j) \in E} s(i,j)(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) = 0.$$

Стресс называется *нетривиальным*, если он не равен тождественно нулю.

Выражение  $s(i,j)(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)$  имеет простой физический смысл: это вектор силы, с которой пружинка  $(i,j)$  действует на вершину  $\mathbf{p}_i$ . Каждая пружина создает противоположно направленные силы, действующие на два ее конца.

Множество стрессов графа  $(G, p)$  образует линейное пространство  $S$  (от слова "stress").

**Задача 2.7.** Убедитесь, что граф (см. рис. 6, внизу) обладает нетривиальным стрессом. Покажите, что его стресс имеет разные знаки на ребрах разного цвета. Покажите, что для этого графа  $\dim S = 1$ .

**Задача 2.8.** Стресс графа определяется системой линейных уравнений. Не заглядывая в ответ, выпишите ее матрицу – вас ждет сюрприз!

Из ответа на эту задачу автоматически следует следующая лемма:

**Лемма 2.9.**  $\dim S = m - \text{rank } R$ . □

**Лемма 2.10.** (1)  $\dim F = 2n - m + \dim S$ .  
 (2) Если для графа  $G$  верно  $m > 2n - 3$ , то всякая его геометрическая реализация имеет нетривиальный стресс.

Доказательство.

Лемма 2.9 и замечание 2.3 дают нам соотношение (1). Утверждение (2) вытекает из следующей цепочки:

$$\dim S = \dim F - 2n + m \geq 3 - 2n + m > 3 - 3 = 0. \quad \square$$

Теперь вспомним опять о жестких и минимально жестких графах. Для двумерного случая (именно его мы и рассматриваем) есть простой критерий, характеризующий минимально жесткие графы:

**Теорема 2.11.** (Теорема Ламана) Граф  $G$  является минимально жестким (или ламановым) тогда и только тогда, когда выполнены два условия:

- (1)  $m = 2n - 3$ ;
- (2) Всякий набор из  $k$  вершин порождает не более чем  $2k - 3$  ребра (мы говорим, что ребро графа  $G$  порождено набором вершин, если оба конца ребра лежат в этом наборе).

Мы докажем эту теорему лишь в одну сторону, в более простую. Пусть граф  $G$  минимально жесткий.

Покажем вначале, что у графа  $(G, p)$  нет нетривиальных стрессов. Предположим противное, пусть нашелся нетривиальный стресс, который не равен нулю на некотором ребре. Удалим это ребро и посмотрим, как изменится при этом формула (1) из леммы 2.10. Число ребер  $m$  уменьшится на единицу. Число вершин  $n$  не изменится. Размерность пространства стрессов тоже уменьшится на единицу. Следовательно, размерность пространства изгибаний не изменится. Но исходный граф  $G$  по предположению жесткий, следовательно после удаления ребра мы опять получили жесткий граф. Противоречие минимальной жесткости.

Следовательно, формула  $\dim F = 2n - m + \dim S$  для минимально жесткого графа принимает вид  $3 = 2n - m + 0$ . Утверждение (1) теоремы доказано.

Докажем утверждение (2). Предположим, что некоторые  $k$  вершин порождают более чем  $2k - 3$  ребро. Из формулы  $\dim F = 2n - m + \dim S$ ,

(примененной к подграфу  $G'$ , порожденному этими  $k$  вершинами) вытекает, что у графа  $G'$  есть нетривиальный стресс. Следовательно, у графа  $G$  тоже есть нетривиальный стресс. Но мы уже знаем, что удаление ребра с ненулевым стрессом не добавляет новых изгибаний. Опять противоречие минимальной жесткости.  $\square$

Мы поняли, что *ламановы графы* – это графы, у которых нет ни нетривиальных стрессов, ни нетривиальных изгибаний. Если у ламанова графа удалить ребро, то появятся изгибания. Если добавить ребро, то обязательно появится стресс.

Попутно мы доказали, что если у графа достаточно много ребер, то у него есть нетривиальный стресс:

**Следствие 2.12.** *Если для графа выполнено  $m > 2n - 3$ , то у него есть нетривиальный стресс.*  $\square$

**Что происходит в размерности три и выше? Лирическое отступление о двойном банане.** Предыдущие рассуждения можно провести и для геометрических реализаций графов в трехмерном пространстве. При этом вместо выражения " $2n - 3$ " появится " $3n - 6$ ". Однако – увы! – аналог теоремы Ламана окажется неверен. Верным будет лишь утверждение в одну сторону (и доказательство буквально повторяет приведенное нами). Более того, пока не найдено никакого другого комбинаторного критерия, позволяющего отличать минимально жесткие графы в размерности 3 и выше.

**Пример 2.13.** *(Двойной банан, см. [3]) Для трехмерного геометрического графа, изображенного на рис. 5, выполнено  $m = 3n - 6$ . Кроме того, в этом графе всякий набор из  $k$  вершин порождает не более чем  $3k - 6$  ребер. Однако граф очевидно изгибаем.*

**Третья ипостась. Трехмерные надстройки.** Вернемся обратно в  $\mathbb{R}^2$ . Теперь нам интересно смотреть на граф как на проекцию некоторой кусочно-линейной поверхности (т. е. поверхности, склеенной из многоугольников – например такой, как на рис. 6)

Дадим формальное определение.

**Определение 2.14.** Геометрический граф  $(G, p)$  разбивает плоскость  $(xy)$  на некоторые области  $T = \{t_i\}$ , одна из которых неограничена.

*Трехмерной надстройкой* геометрического графа  $(G, p)$  называется функция  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  такая, что выполнены следующие условия.

- (1)  $h$  линейна в каждой из областей  $t_i \in T$ ;
- (2)  $h \equiv 0$  в неограниченной области;
- (3)  $h$  непрерывна.

Трехмерная надстройка называется *нетривиальной*, если она не равна тождественно нулю.

В рамках этого определения интересующая нас кусочно-линейная поверхность – это график функции  $h$ .

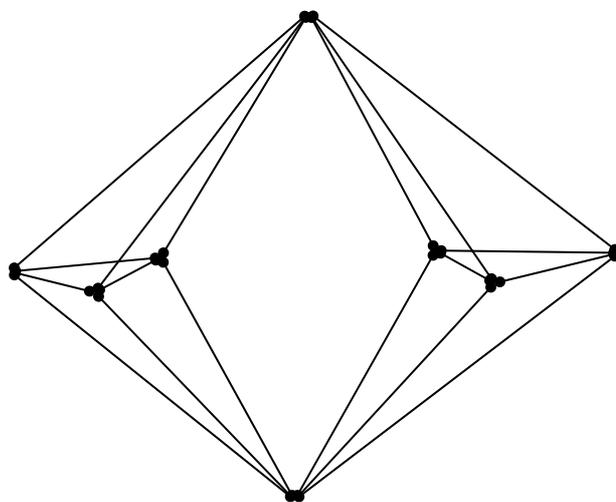


Рис. 5. Двойной банан

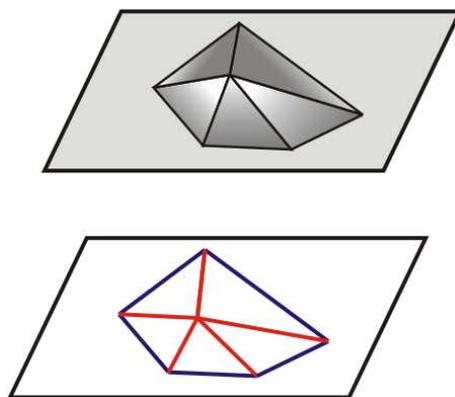


Рис. 6. Граф со стрессом и его надстройка

График тривиальной надстройки совпадает с плоскостью  $(xy)$ .

Заметим, что множество трехмерных надстроек графа образует линейное пространство. Обозначим его через  $L$  (от английского "lifting").

**Задача 2.15.** *Какие из графов (см. рис. 7) обладают нетривиальными надстройками?*

Вдоль некоторых своих ребер эта поверхность выпукла вверх, вдоль некоторых - выпукла вниз. Обратим внимание, что на рис. 6 цвет ребер

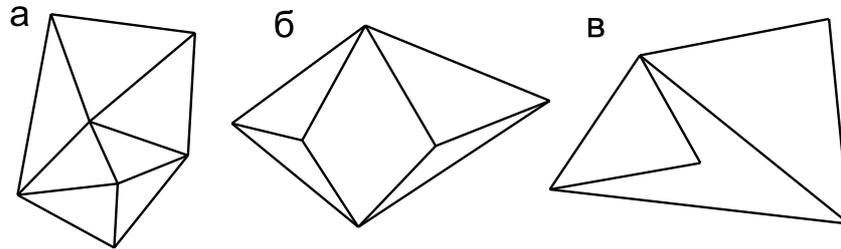


Рис. 7

графа соответствует знаку стресса, а так же типу выпуклости надстройки вдоль ребра. Это частный случай общего факта:

**Теорема 2.16.** *Пространство  $L$  для геометрического графа  $(G, p)$  канонически изоморфно пространству стрессов  $S$ . Иначе говоря, есть способ, ставящий в соответствие каждой надстройке некоторый стресс. При этом выпуклые вверх ребра надстройки соответствуют положительному стрессу, выпуклые вниз ребра надстройки соответствуют отрицательному стрессу, а ребра графа, над которыми нет излома графика – нулевому стрессу.  $\square$*

**Задача 2.17.** *Докажите эту теорему.*

### 3. НЕВЫПУКЛЫЕ ГРАФЫ

#### Невыпуклые графы на плоскости.

**Определение 3.1.** Геометрический граф называется *невыпуклым*, если его ребра не пересекаются между собой, и к каждой его вершине прилегает угол больший  $\pi$ . Например, все графы на рис. 8 и 9 – невыпуклые.

Граф называется *максимальным невыпуклым*, если он невыпуклый и к нему невозможно добавить ребро, сохранив невыпуклость графа.

Всякий невыпуклый граф можно дополнить до максимального невыпуклого, добавляя к нему ребра по одному, пока это возможно (см. например рис. 8). Такое дополнение не единственно.

**Определение 3.2.** Плоским многоугольником называется ограниченная часть плоскости, граница которой – замкнутая несамопересекающаяся ломаная.

Псевдотреугольником называется (плоский) многоугольник, у которого ровно три угла меньше  $\pi$ . Такие углы называются выпуклыми, а прочие – невыпуклыми.

**Задача 3.3.** *Покажите, что на плоскости не существует многоугольника с менее чем тремя выпуклыми углами.*

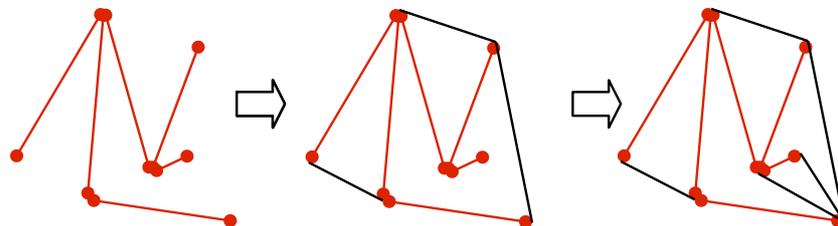


Рис. 8. Дополнение невыпуклого графа до максимального невыпуклого

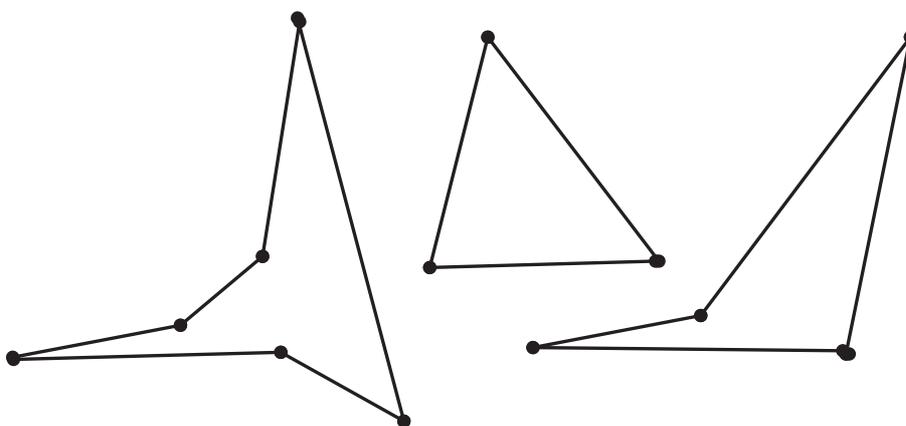


Рис. 9. Псевдотреугольники

**Теорема 3.4.** *Всякий максимально невыпуклый граф разбивает плоскость на области, одна из которых – дополнение некоторого выпуклого многоугольника, а остальные – псевдотреугольники.*

*Доказательство.* Заметим, что к невыпуклому графу можно без ущерба для невыпуклости добавить все ребра его выпуклой оболочки.

Далее, предположим, что какая-то область разбиения не является псевдотреугольником. Значит у нее есть по крайней мере четыре выпуклых угла. Возьмем два несоседних невыпуклых угла и рассмотрим кратчайший путь, проходящий в этой области из одной вершины в другую (см. рис. 10). Этот путь – ломаная, не лежащая целиком на границе области. Добавление ее ребра сохраняет невыпуклость графа.  $\square$

**Теорема 3.5.** *Всякий максимально невыпуклый граф является ламановым графом.*

*Доказательство.* Нужно убедиться в справедливости пунктов (1) и (2) теоремы 2.11. Пусть для максимального невыпуклого графа  $(G, p)$

$n$  – число вершин,

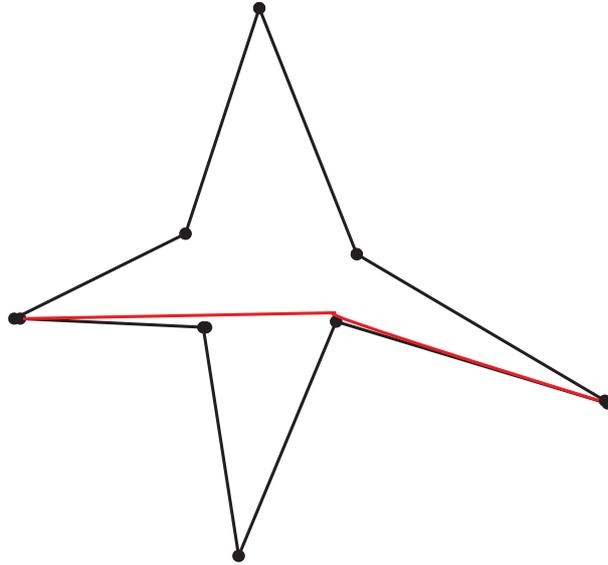


Рис. 10. Кратчайший путь между двумя вершинами

$m$  – число ребер,

$a$  – число всех углов,

$c$  – число всех выпуклых углов ( то есть число углов, меньших  $\pi$ ),

$t$  – число ограниченных областей разбиения.

У нас есть ряд соотношений. Во-первых, формула Эйлера дает нам  $n - m + t = 1$ .

Кроме того, очевидно, что

$$c = 3t \text{ и } a - c = n.$$

Чуть менее очевидно, что

$$a = 2m$$

(разберитесь, каким образом ребро графа порождает два угла).

Отсюда легко вытекает  $m = 2n - 3$ , то есть мы проверили выполнение пункта (1) теоремы 2.11.

Убедимся в справедливости (2). Всякие  $k$  вершин невыпуклого графа порождают некоторый невыпуклый граф. Как мы только что доказали, в нем не более  $2k - 3$  ребер.  $\square$

**Теорема 3.6.** *У максимально невыпуклого графа нет нетривиального стресса.*

Доказательство. Утверждение теоремы для почти всех геометрических реализаций автоматически следует из теорем 2.11 и 3.5. Однако нам надо доказать его для ВСЕХ невыпуклых геометрических реализаций.

Предположим, что у невыпуклого графа  $(G, p)$  есть нетривиальный стресс. Следовательно (см. теорема 2.16), у  $(G, p)$  есть надстройка, график которой отличен от плоскости  $(xy)$ . Пусть для определенности часть графика лежит выше этой плоскости ("верхняя часть надстройки"). Будем приближаться к этому графику плоскостью, параллельной плоскости  $(xy)$

(или почти параллельной ей). В какой-то момент плоскость коснется верхней части надстройки (см. рис. 23). За счет малого варьирования наклона можно добиться того, чтобы это касание произошло ровно в одной точке, вершине нашего графика. Посмотрим внимательно на эту точку – ребра, выходящие из нее, при проецировании на  $(xy)$  не могут давать невыпуклую вершину графа. Противоречие.  $\square$

#### 4. ГРАФЫ НА СФЕРЕ.

Обозначим через  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  единичную сферу с центром в начале координат  $O$ .

*Большой окружностью* называется пересечение сферы  $S^2$  с плоскостью, проходящей через ее центр. *Большой полуокружностью* называется отрезок большого круга, соединяющий две диаметрально противоположные точки.

Теперь вместо геометрических реализаций графов на плоскости мы будем рассматривать геометрические реализации графов на  $S^2$ . Граф на сфере надо представлять себе как граф, ребра которого – отрезки больших окружностей.

Определение изгибаемости (и жесткости) геометрического графа на сфере дословно повторяет определение для плоских графов, а вот определение стресса нам удобно чуть изменить:

**Определение 4.1.** *Стрессом* геометрического графа на сфере  $(G, p)$  называется функция  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  такая, что

$$\forall i \quad \sum_{(i,j) \in E} f(i,j) \mathbf{u}_{ij} = 0.$$

Здесь  $\mathbf{u}_{ij}$  – единичный вектор, касающийся ребра  $(ij)$  в точке  $\mathbf{p}_i$  (см. рис. 11).

Стресс называется *нетривиальным*, если он не равен тождественно нулю.

Физический смысл здесь такой: как и в плоском случае, у нас есть конструкция из напряженных пружинки, обтягивающая сферу.  $f(i, j)$  – сила натяжения пружинки, соответствующей ребру  $(i, j)$ . Только в этом случае векторы сил, создаваемые пружинкой на концах не параллельны. Но они равны по величине и действуют вдоль ребра. Если стресс положительный, то силы сонаправлены векторам  $\mathbf{u}_{ij}$ .

Для нас важно, что для графов на сфере остаются справедливыми теоремы о стрессах и изгибаниях параграфа 2 (почему это так, мы здесь не объясняем).

Может показаться, что переход к сфере не на много меняет ситуацию, ведь любой плоский граф можно поднять на сферу с помощью центральной проекции. Однако отличие все же очень велико, и оно касается невыпуклых графов.

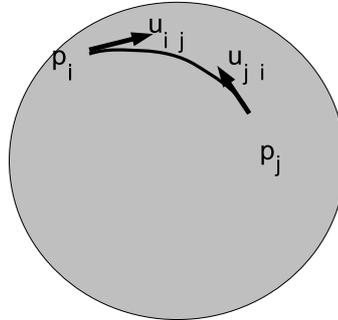


Рис. 11

Нас будут особенно интересовать невыпуклые графы на сфере с нетривиальным стрессом, то есть такие, которые на плоскости не существуют.

**Невыпуклые графы на сфере.** Корень отличия невыпуклых графов на сфере и на плоскости заключается в существовании псевдодвуугольников.

**Определение 4.2.** Сферическим многоугольником называется часть  $S^2$ , граница которой – замкнутая несамопересекающаяся ломаная.

Как и для плоскости, *псевдотреугольником* называется (сферический) многоугольник, у которого ровно три угла меньше  $\pi$ . Такие углы называются *выпуклыми*, а углы большие  $\pi$  – *невыпуклыми*.

*Псевдодвуугольником* называется (сферический) многоугольник, у которого ровно два угла меньше  $\pi$ .

Псевдодвуугольники существуют, см. например рис. 12.

Псевдодвуугольник невозможно сделать маленьким (легко видеть, что он не может лежать в открытой полусфере, иначе его можно было бы спроецировать на плоскость, а на плоскости псевдодвуугольников не бывает).

Однако псевдодвуугольник можно сделать сколь угодно узким, лежащим в сколь угодно малой окрестности большой полуокружности.

**Теорема 4.3.** Пусть  $(G, p)$  – невыпуклый граф на сфере. Пусть каждая область разбиения – либо псевдодвуугольник, либо псевдотреугольник. Тогда  $m = 2n + d - 6$ , где  $d$  – число псевдодвуугольников.

Доказательство почти дословно повторяет доказательство теоремы 3.5, только теперь надо учитывать наличие псевдодвуугольников.  $\square$

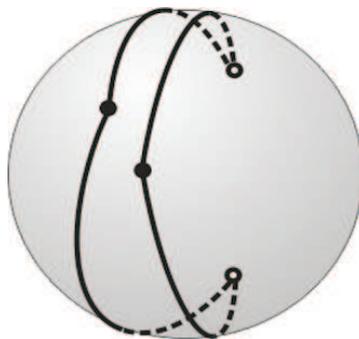


Рис. 12. Псевдодвуугольник

**Следствие 4.4.** *Если для невыпуклого графа на сфере  $(G, p)$  каждая область разбиения – либо псевдодвуугольник, либо псевдотреугольник, причем число псевдодвуугольников больше трех, то у графа  $(G, p)$  есть нетривиальный стресс.*  $\square$

Построим такой граф. Расположим на сфере четыре (или больше) непесекающихся больших полуокружности. Вокруг каждой из них построим псевдодвуугольник (разумеется, так, чтобы постоянные псевдодвуугольники не пересекались), а затем дополним рисунок псевдотреугольниками до невыпуклого графа (будем добавлять ребра по одному, сохраняя невыпуклость, примерно так, как мы это делали на рис. 8). Такое построение проделано на рис. 13 для четырех псевдодвуугольников, а на рис. 14 – для восьми. Полученный граф – невыпуклый и обладает нетривиальным стрессом.

#### 5. ГРАФЫ НА СФЕРЕ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ СТРЕССОМ. ГРУППА ВИРТУАЛЬНЫХ МНОГОГРАННИКОВ

Пусть  $(G, f)$  – пара, где  $G$  – геометрический граф на сфере, а  $f$  – его всюду положительный стресс. Покажем, что этому объекту можно поставить в соответствие трехмерный выпуклый многогранник  $P(G, f)$  (от английского слова "polytope"):

- Рассмотрим вначале одну вершину  $\mathbf{p}_i$  графа  $G$ . Пусть  $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k$  – силы, создаваемые пружинами в вершине  $\mathbf{p}_i$ . Это вектора, идущие вдоль ребер графа, примыкающих к  $\mathbf{p}_i$ , длины которых равны значению стресса. Поскольку стресс всюду положительный, все эти

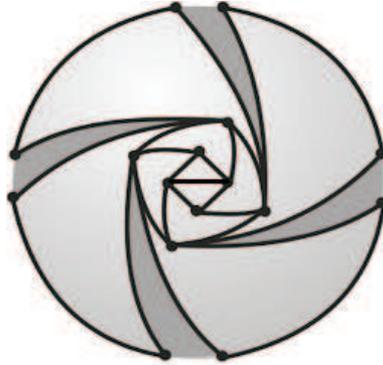


Рис. 13. Серым цветом отмечены четыре псевдодвуугольника, точнее, их видимые половинки

вектора направлены вдоль ребра от вершины. Будем считать, что нумерация ребер соответствует порядку обхода ребер графа по часовой стрелке.

- Для вершины  $\mathbf{p}_i$  рассмотрим касательную к сфере плоскость. В этой плоскости построим выпуклый многоугольник, руководствуясь следующим правилом. Выберем точку в плоскости и будем откладывать один за другим вектора  $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k$ , повернутые на угол  $\pi/2$  по часовой стрелке (см. рис. 15). Поскольку сумма всех этих векторов равна нулю (это условие из определения стресса), ломаная замкнется и ограничит некоторый выпуклый многоугольник  $P_i$ .
- Аналогично поступим со всеми остальными вершинами графа.

Заметим, что у многоугольников, соответствующих соседним вершинам графа, есть параллельные стороны одинаковой длины. Поэтому из таких многоугольников, перенося их параллельно, можно собрать выпуклый многогранник  $P(G, f)$ . Он определяется такой конструкцией с точностью до параллельного переноса.

Обратно, по выпуклому многограннику можно построить граф с положительным стрессом (см. рис. 16). Для этого нужно на сфере отметить концы нормальных векторов граней многогранника (это вершины графа) и соединить их согласно комбинаторике многогранника отрезками больших окружностей (это ребра). Значение стресса на ребре при этом полагаем равным длине соответствующего ему ребра многогранника.

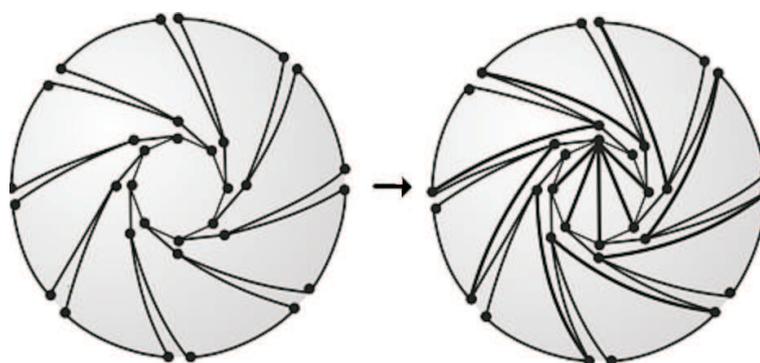


Рис. 14. На сфере вполне уместятся восемь псевдодвуугольников

В этой схеме мы имеем дело с *комбинаторной двойственностью*: вершинам графа соответствуют грани многогранника, вершинам многогранника – области разбиения сферы, ребрам графа – ребра многогранника, причем две вершины графа соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие грани имеют общее ребро.

**Пример 5.1.** *Расположим на сфере три большие окружности, лежащие под углом  $\pi/2$  друг к другу. Их объединение порождает граф с 6 вершинами и 8 ребрами. Функция, ставящая в соответствие каждому ребру число 1, очевидно является стрессом. Убедитесь, что в нашей схеме такому графу со стрессом соответствует куб.*

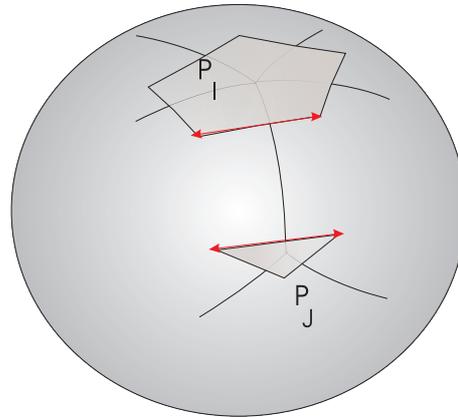


Рис. 15. Построение выпуклого многогранника по графу с положительным стрессом

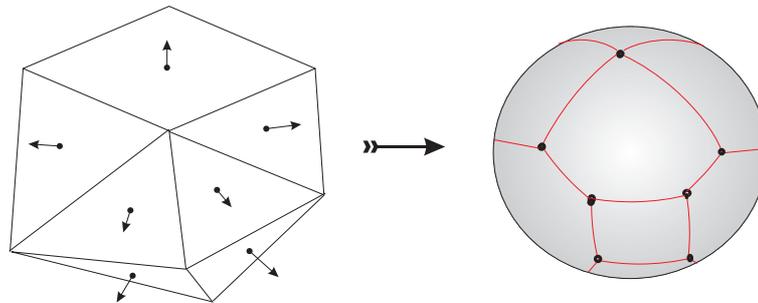


Рис. 16. Выпуклый многогранник порождает граф с положительным стрессом

**Задача 5.2.** *А какой многогранник получится, если взять не три, а только две больших окружности?*

**Пример 5.3.** *Единичный отрезок тоже можно рассматривать как трехмерный многогранник. Попробуем сообразить, какой граф на сфере ему соответствует. Согласно комбинаторной двойственности, у него не должно быть вершин (ведь у отрезка нет граней) и должно быть всего одно ребро. Поэтому нам приходится расширить понятие графа на сфере:*

**Определение 5.4.** Одно замкнутое ребро, совпадающее с большой окружностью, тоже будем считать геометрическим графом на сфере. Значение стресса на этом ребре может быть любым. Такой граф (со стрессом) будем называть *экзотическим*.

Физический смысл экзотического графа ясен: у нас есть растянутая пружина, опоясывающая сферу. Разумеется, она находится в равновесии.

Подытожим сказанное. Обозначим через  $\mathcal{G}^+$  множество всех пар вида (граф на сфере, его всюду положительный стресс). Это множество включает пустой граф и экзотические графы.

Обозначим через  $\mathcal{P}^+$  множество всех выпуклых многогранников в трехмерном пространстве, включая все вырожденные многогранники (точки, плоские многоугольники, отрезки). Многогранники мы будем рассматривать с точностью до параллельного переноса.

Выше мы описали биективное отображение

$$P : \mathcal{G}^+ \rightarrow \mathcal{P}^+.$$

Ниже мы объясним, что эти два множества – коммутативные полугруппы, и что отображение  $P$  – полугрупповой изоморфизм.

**Сумма Минковского.** Определим на множестве  $\mathcal{P}^+$  операцию сложения по Минковскому.

**Определение 5.5.** Пусть  $K, L \subset \mathbb{R}^3$  – выпуклые многогранники. Их суммой Минковского называется выпуклый многогранник

$$K \otimes L = \{\mathbf{x} + \mathbf{y} \mid \mathbf{x} \in K, \mathbf{y} \in L\}.$$

Напомним, что точки пространства мы отождествляем с их радиус-векторами.

Для проверки корректности надо убедиться в том, что сумма Минковского выпуклых многогранников действительно является выпуклым многогранником, и что если переместить слагаемые с помощью параллельных переносов, то сумма останется той же (с точностью до параллельного переноса).

**Пример 5.6.** *Сумма Минковского двух ортогональных отрезков – прямоугольник. Сумма трех взаимно ортогональных отрезков одинаковой длины – куб.*

Сложение по Минковскому превращает множество  $\mathcal{P}^+$  в коммутативную полугруппу. В ней есть нулевой элемент  $E$  – это многогранник, состоящий из одной точки. Элементы этой полугруппы (за исключением нулевого) не обратимы.

Теперь опишем процедуру сложения элементов множества  $\mathcal{G}^+$ . Пусть  $(G_1, f_1)$  и  $(G_2, f_2)$  – два графа с положительными стрессами. Зададим их сумму алгоритмически:

- Поместим на сфере оба графа, и в качестве суммы  $(G_1, f_1) + (G_2, f_2)$  возьмем результат наложения этих графов. Говоря точнее, нужно взять все вершины графов  $(G_1, f_1)$  и  $(G_2, f_2)$  и все новые вершины, получившиеся как пересечения ребер  $(G_1, f_1)$  и  $(G_2, f_2)$ . Ребра полученного графа – кусочки ребер  $(G_1, f_1)$  и  $(G_2, f_2)$ .
- Значение стресса  $(G_1, f_1) + (G_2, f_2)$  на ребре наследуется. Это значит, что если ребро графа  $(G_1, f_1) + (G_2, f_2)$  есть часть ребра графа  $G_1$ , то ему надо присвоить значение стресса  $f_1$ . Аналогично, если ребро суммы есть часть ребра графа  $G_2$ , то ему надо присвоить значение стресса  $f_2$ . Если же ребро одновременно является частью ребер обоих графов, то значения стрессов надо сложить.

Несложно убедиться, что в результате мы получим граф с положительным стрессом. Эта операция превращает  $\mathcal{G}^+$  в коммутативную полугруппу. В ней есть нулевой элемент – это пустой граф. Элементы этой полугруппы (за исключением нулевого) не обратимы.

**Теорема 5.7.** • Полугруппа  $\mathcal{G}^+$  изоморфна полугруппе выпуклых многогранников.

• Биекция  $P : \mathcal{G}^+ \rightarrow \mathcal{P}^+$  является изоморфизмом полугрупп.

Иными словами, сложить два графа  $(G_1, f_1)$  и  $(G_2, f_2)$ , а потом взять соответствующий многогранник – то же самое, что взять сумму Минковского многогранников  $P(G_1, f_1)$  и  $P(G_2, f_2)$ .  $\square$

Мы оставляем эту теорему без доказательства. Отметим впрочем, что примеры 5.1 и 5.3 в сравнении с примером 5.6 хорошо ее иллюстрируют.

**Вычитание Минковского.** Превратим эти две полугруппы в группы, введя при этом согласованные операции вычитания. При этом нам придется расширить класс объектов. Основная наша цель – придать точный смысл выражению "разность Минковского двух выпуклых многогранников".

К полугруппе  $\mathcal{P}^+$  можно применить стандартный алгебраический прием (переход к группе Гротендика) – ввести группу формальных выражений вида  $K \otimes L^{-1}$ , где  $K$  и  $L$  – выпуклые многогранники, объяснив при этом, как такие выражения перемножать (как обычные дроби), и что некоторые такие выражения можно сокращать (тоже как обычные дроби).

Этот прием хорош, но нам мало – мы хотим каждому формальному выражению  $K \otimes L^{-1}$  сопоставить геометрический объект.

Для этого сначала разберемся, как вычитать графы со стрессами.

**Определение 5.8.** Обозначим через  $\mathcal{G}$  множество всех пар вида (граф на сфере, его всюду ненулевой стресс). Это множество очевидно содержит множество  $\mathcal{G}^+$ . Опíšем групповую операцию на  $\mathcal{G}$ , которая для графов из  $\mathcal{G}^+$  совпадает с уже описанной нами операцией сложения.

Пусть  $(G_1, f_1)$ ,  $(G_2, f_2)$  – два графа с ненулевыми стрессами. Зададим их сумму алгоритмически (рис. 17):

- Как и выше, возьмем результат наложения этих графов.
- Как и выше, значение стресса на ребрах наследуется от слагаемых.
- Но на этом процедура сложения не заканчивается. Следующий шаг – удаление лишних ребер и вершин. Может случиться так, что стресс суммы  $(G_1, f_1) + (G_2, f_2)$  на некотором ребре окажется равным нулю. Тогда такое ребро надо удалить.
- После удаления всех ребер с нулевым стрессом может случиться так, что к одной вершине примыкают ровно два ребра (это означает, что эти ребра образуют угол  $\pi$ , и стрессы на этих ребрах равны). Тогда эту вершину надо удалить, а два ребра объединить в одно.
- Может случиться, что появятся вершины без прилегающих ребер. Всех их надо удалить.

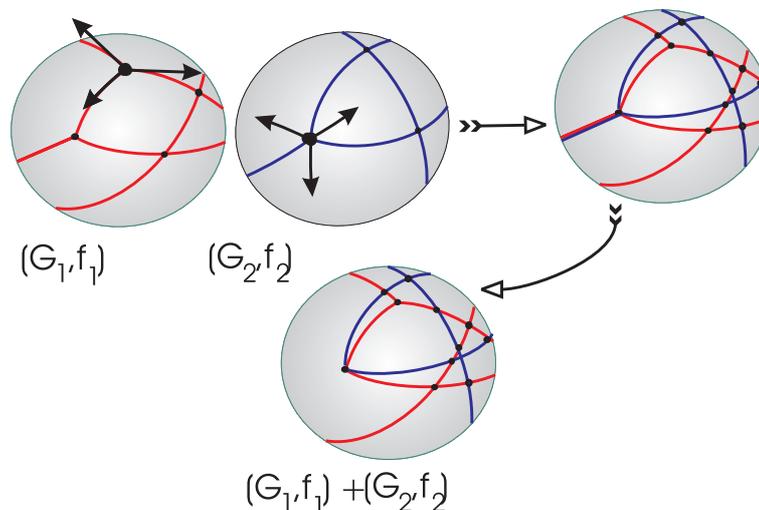


Рис. 17. Сумма дввух графов с положительным и отрицательным стрессами

Множество  $\mathcal{G}$  образует группу – любой элемент в ней обратим. Действительно, сумма графов  $(G, f)$  и  $(G, -f)$  дает пустой граф.

Теперь попробуем по графу со всюду ненулевым (но теперь не обязательно положительным) стрессом  $(G, f)$  построить геометрический объект  $P(G, f)$ .

Алгоритм здесь такой же, как и для графа с положительным стрессом, однако объект получается другой:

- Для вершины  $\mathbf{p}_i$  графа  $(G, f)$  пусть  $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k$  – силы, создаваемые пружинками в вершине  $\mathbf{p}_i$ . Теперь это вектора, идущие либо в направлении ребра, либо в противоположном направлении, длины которых равны значению стресса. Мы считаем, что нумерация соответствует порядку обхода ребер графа по часовой стрелке. Поскольку стресс может быть знакопеременный, сами вектора  $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k$  могут идти совсем в другом порядке.
- Как и прежде, для вершины  $\mathbf{p}_i$  рассмотрим касательную к сфере плоскость. В этой плоскости построим замкнутую ломаную, руководствуясь старым правилом: выберем точку и будем откладывать один за другим вектора  $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k$ , повернутые на угол  $\pi/2$  по часовой стрелке. Здесь важно, что мы берем вектора согласно порядку ребер, а не порядку векторов.

**Пример 5.9.** Такая ломаная может выглядеть по разному. Один из вариантов приведен на рис. 18. Изображена вершина с примыкающими ребрами. Цветом отмечены знаки стрессов: красный цвет соответствует положительному стрессу, синий – отрицательному. Отдельно изображены вектора  $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k$  и полученная ломаная.

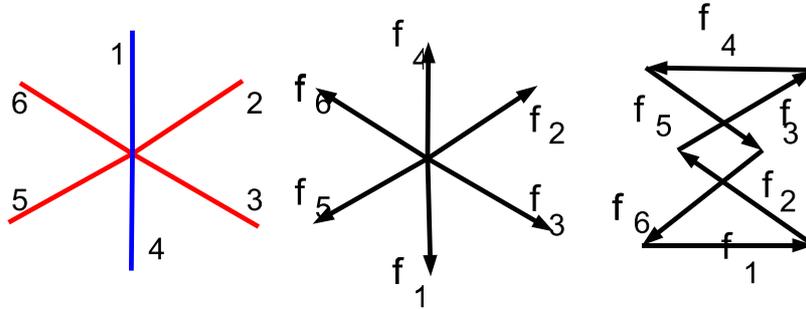


Рис. 18. Построение грани виртуального многогранника

- Аналогично поступим со всеми остальными вершинами графа. Для каждой вершины мы получим невыпуклый многоугольник (замкнутую плоскую ломаную, возможно с самопересечениями).
- Для этих многоугольников остается выполненным главное свойство, позволяющее собрать их воедино – у многоугольников, соответствующих соседним вершинам графа, есть параллельные ребра одинаковой длины.

Поэтому из таких многоугольников, перенося их параллельно, можно собрать некий объект  $P(G, f)$ , определяемый такой конструкцией с точностью до параллельного переноса.

Расширим множество  $\mathcal{P}^+$  до множества  $\mathcal{P}$ , добавив в него все возможные объекты  $P(G, f)$ . Полугрупповой изоморфизм  $P$  продолжается естественным образом до группового изоморфизма  $P : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{P}$ .

**Определение 5.10.** Элементы группы  $\mathcal{G}$  называются *виртуальными многогранниками*. Имея ввиду изоморфизм  $P$ , элементы группы  $\mathcal{P}$  тоже будем называть *виртуальными многогранниками*.

Таким образом, виртуальный многогранник предстает перед нами в трех ипостасях:

- это формальная разность Минковского двух выпуклых многогранников,
- это пара вида (граф на сфере, его всюду ненулевой стресс),
- это геометрический трехмерный объект, склеенный из плоских замкнутых ломаных.

Этим списком представления виртуальных многогранников далеко не исчерпываются. В него можно было бы включить кусочно-постоянные функции особого вида (следуя изложению [2]) или систему конусов, или

обратимый пучок на проективном торическом многообразии (следуя [4]). В этой статье представлена лишь малая толика разветвленной теории виртуальных многогранников.

**Пример 5.11.** На рисунке 19 представлен граф со стрессом  $(G, f)$ . Граф трехвалентен, следовательно соответствующий ему виртуальный многогранник  $P(G, f)$  (см. рис. 20) склеен из треугольников.

Эти рисунки (но трехмерные, а не плоские), некоторые другие модели, статьи и т. д. представлены на сайте [9].

## 6. СЕДЛОВЫЕ ПОВЕРХНОСТИ. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ (СЕДЛОВЫЕ) ВИРТУАЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

**Определение 6.1.** Поверхность называется *седловой*, если никакая плоскость не пересекает ее локально ровно в одной точке.

На седловое свойство надстройки мы обращали внимание в доказательстве теоремы 3.6, и оно же будет играть ключевую роль в распрямлении складного метра. Ниже мы покажем, что седловые поверхности имеют непосредственное отношение к гипотезе А.Д. Александрова.

Поэтому среди виртуальных многогранников нас будет интересовать совершенно особый класс – гиперболические (или седловые) виртуальные многогранники. По своим свойствам выпуклости они противоположны выпуклым многогранникам.

Дадим вначале очень неформальное пояснение. Когда мы расширили полугруппу выпуклых многогранников до группы виртуальных многогранников, мы потеряли выпуклость. Типичный виртуальный многогранник не является выпуклым. Как правило, у него есть выпуклые участки, где-то он вогнут, а кое-где устроен как седловая поверхность. Мы хотим выделить класс виртуальных многогранников, не имеющих ни выпуклых, ни вогнутых участков. Они должны быть всюду седловые.

**Определение 6.2.** Виртуальный многогранник  $(G, f)$  называется *гиперболическим (или седловым)*, если геометрический граф  $G$  – невыпуклый.

Мы уже знаем, что гиперболические виртуальные многогранники существуют (см. рис. 13, 14, 19, 20). Без теории графов со стрессами этот факт был бы совсем не очевиден. Мы покажем ниже, что каждый гиперболический виртуальный многогранник порождает контрпример к гипотезе А.Д. Александрова.

## 7. РАСПРЯМЛЯЕМ СКЛАДНОЙ МЕТР

Рассмотрим максимальный невыпуклый граф на плоскости. Удалим одно из его ребер, скажем, ребро  $(1, 2)$ , лежащее на выпукдой оболочке графа (см. рис. 21, справа). Мы получим изгибаемый граф  $(G, p)$ . Его изгибания обладают следующим замечательным свойством, которое существенно для распрямления складного метра.

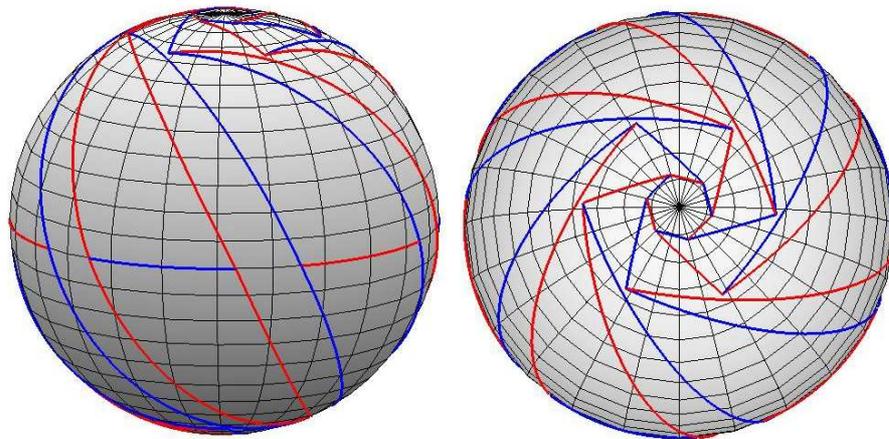


Рис. 19

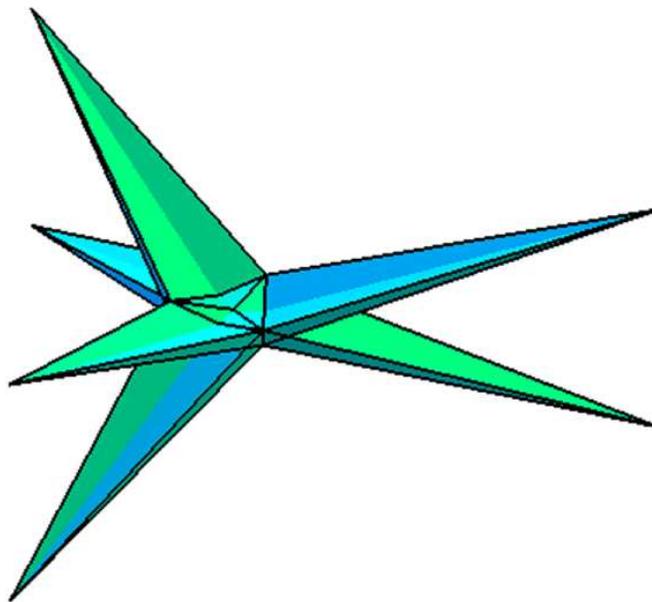


Рис. 20. Гиперболический виртуальный многогранник с шестью рогами

В этих обозначениях верен следующий ключевой для распрямления факт.

**Теорема 7.1.** *Если при изгибании графа  $(G, p)$  расстояние между точками  $p_1$  и  $p_2$  увеличивается, то расстояние между любыми другими двумя вершинами графа не уменьшается.*

Очень полезно зайти на сайт

<http://maven.smith.edu/~streinu/Research/Motion/mech01.html>

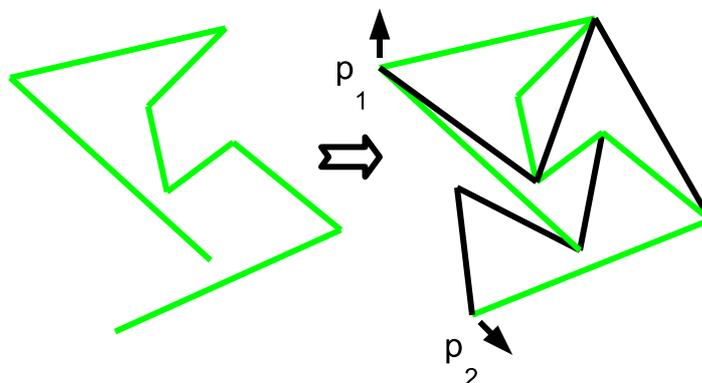


Рис. 21. Распрямление складного метра

и посмотреть на движущуюся иллюстрацию этой теоремы.

Еще лучше – проверить утверждение для собственноручно построенного графа на сайте

<http://www.cs.umass.edu/%7Ealee/demos/motionSimulation.php>

Доказательство теоремы.

Установим вначале два необходимых нам факта.

**1.** Пусть на плоскости имеется конечное множество точек  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ . Припишем каждой точке  $\mathbf{p}_i$  произвольным образом некоторый вектор скорости  $\mathbf{v}_i$  и положим  $d_{ij} = (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j)(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)$ . В матричном виде это можно записать как  $R\mathbf{v} = \mathbf{d}$ , где  $\mathbf{v}$  – вектор, составленный из всех векторов  $\mathbf{v}_i$ ,  $\mathbf{d}$  – вектор, составленный из всех  $d_{ij}$ , а  $R$  – матрица жесткости полного графа с вершинами в точках  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ .

С точностью до положительного множителя, величина  $d_{ij}$  есть мгновенная скорость изменения расстояния между точками  $\mathbf{p}_i$  и  $\mathbf{p}_j$  при движении, задаваемом  $\mathbf{v}$ .

Покажем, что всякий полученный таким образом вектор  $\mathbf{d}$  ортогонален всякому стрессу  $\mathbf{s}$  полного графа. (Вектор  $\mathbf{s}$  составлен из всех значений некоторого стресса полного графа.)

Действительно,  $(\mathbf{s}, \mathbf{d}) = (\mathbf{s}, R\mathbf{v}) = \mathbf{s}^\perp R\mathbf{v} = (\mathbf{s}^\perp R)\mathbf{v} = 0$ , так как  $R^T \mathbf{s} = 0$ .

**2.** Теперь вернем в наш граф  $(G, p)$  ребро  $(1, 2)$ , и кроме того, добавим еще одно ребро (скажем,  $(3, 4)$ ), не пересекающее ребра графа (см. рис. 22). Получится граф  $(G', p)$ , обладающий нетривиальным стрессом (так как это ламанов граф с добавленным ребром). Покажем, что знаки стресса на ребрах  $(1, 2)$  и  $(3, 4)$  разные.

Действительно, рассмотрим некоторый стресс  $\mathbf{s}$  графа  $(G', p)$ . Пусть для определенности  $s(1, 2) < 0$ . Вспомним, что по стрессу можно построить

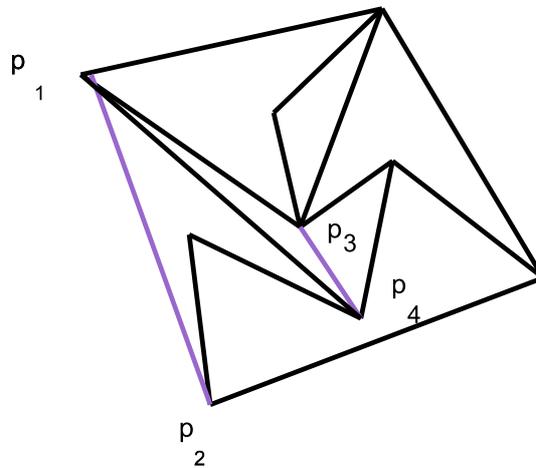


Рис. 22. Максимальный невыпуклый граф с добавленным ребром

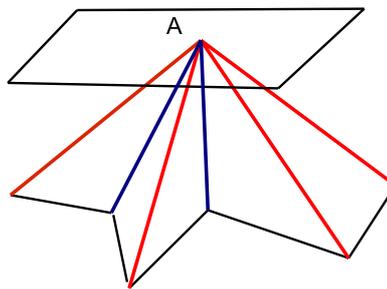


Рис. 23

трехмерную надстройку графа, причем знак стресса соответствует выпуклости вверх – выпуклости вниз ребер графика надстройки. Поскольку ребро  $(1, 2)$  выпукло вниз, часть графика лежит выше плоскости  $(xy)$  ("верхняя часть надстройки").

Подобно тому, как мы это делали в доказательстве теоремы 3.6, будем приближаться к графику надстройки плоскостью, параллельной плоскости  $(xy)$  (или почти параллельной ей). В какой-то момент плоскость коснется верхней части надстройки (см. рис. 23). Можно считать, что это касание произойдет ровно в одной точке, вершине  $A$  графика надстройки. Эта вершина соответствует либо вершине 3, либо вершине 4 графа  $G$ . К вершине  $A$  могут примыкать выпуклые вниз ребра. Но к ней обязательно примыкают и выпуклые вверх ребра, причем проекции выпуклых вверх

ребер не могут образовывать невыпуклую вершину. Следовательно, ребро надстройки, соответствующее  $(3, 4)$ , выпукло вверх. И значит, стресс ребра  $(3, 4)$  положительный.

Теперь докажем утверждение теоремы. Будем считать, что ребра полного графа с вершинами в точках  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$  занумерованы следующим образом: сначала идет ребро  $(1, 2)$ , затем ребро  $(3, 4)$ , затем ребра графа  $G$ , и уж потом – остальные ребра полного графа.

Тогда рассмотренный нами стресс  $\mathbf{s}$  (который автоматически является стрессом полного графа) в векторной записи выглядит так:

$$\mathbf{s} = (-, +, \underbrace{\cdot, \cdot, \dots, \cdot}_{\text{ребра графа } G}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{\text{остальные ребра полного графа}})$$

Знак "+" (соответственно, "-") означает, что на этом месте стоит положительное (соответственно, отрицательное) число. Точка означает, что об этом числе ничего не известно. С другой стороны, рассмотрим вектор  $\mathbf{d}$ , порожденный изгибанием графа  $(G, p)$ , при котором расстояние между точками  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$  увеличивается. Этот вектор выглядит так:

$$\mathbf{d} = (+, ?, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{\text{ребра графа } G}, \underbrace{\cdot, \cdot, \dots, \cdot}_{\text{остальные ребра полного графа}}).$$

Но мы только что доказали, что эти два вектора ортогональны. Следовательно, на месте вопросительного знака стоит знак "+", что и требовалось доказать.  $\square$

Теперь все готово для описания алгоритма распрямления:

**Шаг 1.** Будем смотреть на складной метр как на невыпуклый граф на плоскости. Добавим к нему новые ребра таким образом, чтобы в результате получился максимальный невыпуклый граф (рис. 21). Удалим одно из добавленных ребер, скажем,  $(1, 2)$ , лежащее на выпуклой оболочке графа. Мы получим изгибаемый граф  $(G, p)$ . Будем изгибать полученный шарнирный механизм (увеличивая расстояние между точками  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$ ) до тех пор, пока граф остается невыпуклым. В силу теоремы 7.1, все внутренние расстояния между вершинами не уменьшаются, что гарантирует нам отсутствие самопересечений.

**Шаг 2.** Рано или поздно невыпуклость графа исчезнет (и значит, исчезнет гарантия отсутствия самопересечений). В этом случае надо удалить все старые вспомогательные ребра, дополнить заново граф до максимального невыпуклого и следовать шагу 1.

**Задача 7.2.** Как надо поступить при распрямлении, если какие-то два соседних ребра складного метра образуют угол  $\pi$ ? Ведь формально говоря, такой складной метр невозможно дополнить до невыпуклого графа.

## 8. ПОСТРОЕНИЕ КОНТРПРИМЕРОВ К ГИПОТЕЗЕ А.Д. АЛЕКСАНДРОВА

Обратимся теперь к гипотезе А.Д. Александрова.

Предположим, что тело  $K$  удовлетворяет условию гипотезы. Рассмотрим разность Минковского  $H = K \otimes B_C^{-1}$  тела  $K$  и шара  $B_C$  радиуса  $C$ .

Вообще говоря, разность Минковского гладких выпуклых тел мы не определяли, у нас есть только понятие разности выпуклых многогранников. Читателю предлагается поверить, что для гладких тел тоже существует корректная теория, описывающая их разности.

Посмотрим на главные радиусы кривизны поверхности  $H = K \otimes B_C^{-1}$ . Заметим, что при прибавлении шара радиуса  $C$  к телу  $K$ , главные радиусы кривизны увеличиваются на  $C$ . Отсюда логично сделать вывод (и это действительно так, но доказательство мы опускаем), что при вычитании шара радиуса  $C$ , главные радиусы кривизны уменьшаются на  $C$ .

Поэтому неравенство  $R_1 \leq C \leq R_2$  для главных радиусов кривизны тела  $K$  превращается в неравенство  $R'_1 \leq 0 \leq R'_2$  для главных радиусов кривизны поверхности  $H$ . Это означает, что поверхность  $H$  является седловой поверхностью во всех своих гладких точках.

И обратно, всякая поверхность, седловая во всех своих гладких точках, которая представима в виде разности Минковского гладких выпуклых тел, автоматически дает контрпример к гипотезе.

Этот прием, сводящий гипотезу к вопросу существования седловой поверхности указанного типа, был известен А. Д. Александрову еще в 1938 году.

Однако до решения проблемы было далеко. Дело в том, что хотя седловых поверхностей много, совсем не все они представимы в виде разности Минковского. Это очень специальное свойство, накладывающее сильные ограничения.

Первую такую поверхность построил в 2001 году французский математик И. Мартинес-Мор. Это ориентированная замкнутая поверхность  $M \subset \mathbb{R}^3$ , обладающая следующими свойствами.

- (1) Поверхность  $M$  седловая во всех своих гладких точках.
- (2) Поверхность  $M$  может быть представлена как разность Минковского двух гладких выпуклых тел.
- (3) У этой поверхности ровно 4 точки, в которых она не является седловой. Эти точки называются *рогами* (см. рис. 24).

Поверхность  $M$  была предъявлена как результат склейки графиков двух функций, заданных длинными формулами. Эти формулы можно найти в русском переводе статьи [5] на сайте [9].

Однако оказалось, что построенный контрпример не единственный:

**Теорема 8.1.** (см. [7]) *Для любого четного числа  $N \geq 4$  существует поверхность, удовлетворяющая свойствам (1-2) с числом рогов  $N$ .  $\square$*

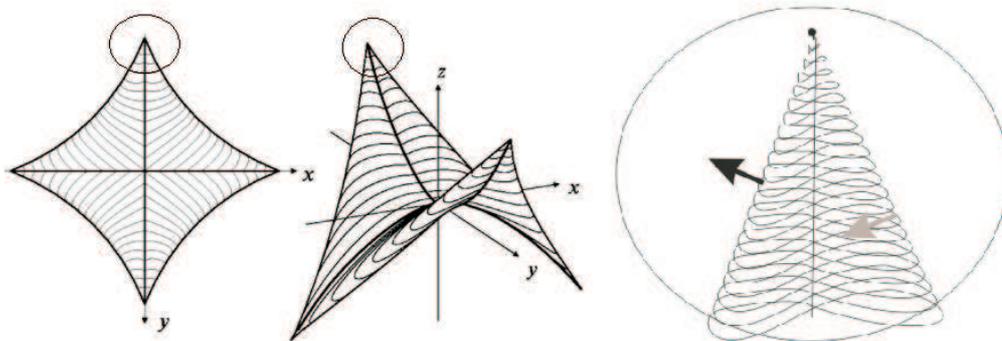


Рис. 24. Поверхность  $M$ , вид сверху и сбоку. Отдельно показано ее устройство вблизи рога.

(Число рогов у такой поверхности не может быть меньше четырех из простых соображений: всякая поверхность лежит в выпуклой оболочке своих неседловых точек.)

Все контрпримеры (кроме самого первого) были построены с помощью теории гиперболических виртуальных многогранников согласно следующему плану:

- (1) Построим гиперболический виртуальный многогранник  $L$ . Он обладает таким же необходимым для нас седловым свойством, как и поверхность  $M$  (почему это так, мы не объясняем). Однако  $L$  не является гладким.
- (2) Сгладим виртуальный многогранник  $L$ , сохраняя его седловое свойство. Сглаживание седловых объектов – отдельная сложная тема, которой мы здесь совсем не касаемся. Для понимания этой статьи достаточно наивного представления – у нас есть гладкие поверхности, а есть их многогранные приближения.
- (3) К полученному объекту  $H$  прибавим по Минковскому шар  $B_C$  достаточно большого радиуса  $C$ . А именно, настолько большого, чтобы сумма  $H \otimes B_C$  оказалась выпуклым телом. Оно обязательно окажется контрпримером к гипотезе.

Для гиперболических виртуальных многогранников тоже есть понятие рога. Например, у гиперболического многогранника на рис. 20 шесть рогов, а на рис. 25 – восемь.

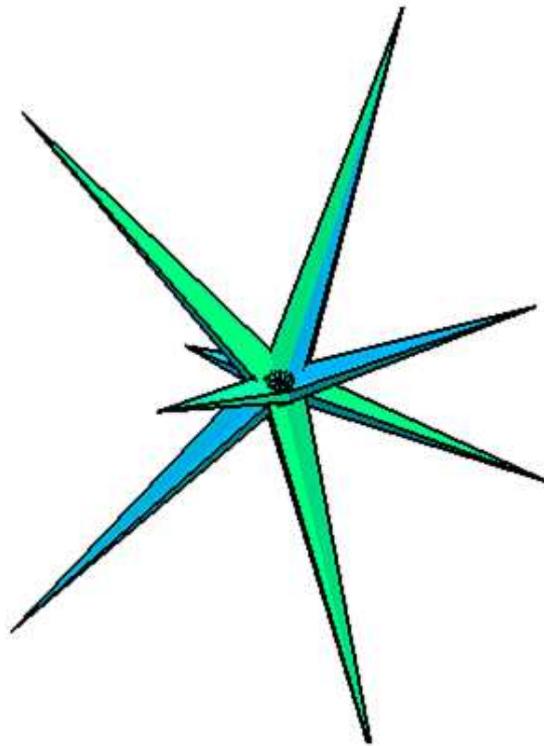


Рис. 25. Гиперболический виртуальный многогранник с восьмью рогами

Гиперболические виртуальные многогранники (а следовательно, и порожденные ими контрпримеры к гипотезе) естественно различать по числу рогов. Но есть и более тонкая классификация. Мы покажем, что гиперболический виртуальный многогранник порождает более сложный и интересный объект – конфигурацию больших полуокружностей на сфере  $S^2$ .

## 9. КОНФИГУРАЦИИ БОЛЬШИХ ПОЛУОКРУЖНОСТЕЙ НА $S^2$

**Определение 9.1.** Конечный набор непересекающихся больших полуокружностей на сфере будем называть *конфигурацией больших полуокружностей*.

Две конфигурации называются *изотопными*, если существует непрерывное движение полуокружностей первой конфигурации (*изотопия*), переводящее ее в положение второй конфигурации.

При таком движении полуокружности могут двигаться независимо, расстояния и углы между ними могут меняться, запрещаются только пересечения.

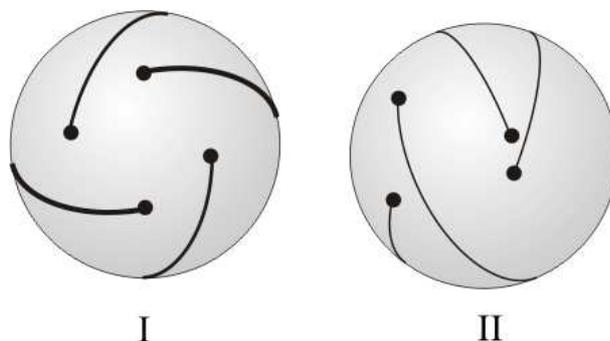


РИС. 26. Неизотопные конфигурации больших полуокружностей

Тип конфигурации (с точностью до изотопии) не определяется однозначно числом больших полуокружностей. Например, конфигурации четырех полуокружностей (см. рис. 26) не изотопны (доказательство этого факта мы опускаем).

**Задача 9.2.** Докажите, что всякий псевдодвуугольник, стороны которого короче  $\pi$ , содержит строго внутри большую полуокружность.

**Определение 9.3.** Будем говорить, что у геометрического графа на сфере  $(G, f)$  ребра короткие, если длины всех ребер меньше  $\pi$ .

**Теорема 9.4.** (1) Пусть  $(G, f)$  – гиперболический виртуальный многогранник. Каждому рожу  $P(G, f)$  соответствует (по комбинаторной двойственности) некоторый псевдодвуугольник в разбиении сферы, порожденном графом  $(G, f)$ .

(2) Следовательно, всякий гиперболический виртуальный многогранник с короткими ребрами порождает конфигурацию по крайней мере четырех больших полуокружностей.

Пояснения к теореме. Для почти всех гиперболических виртуальных многогранников наличие по крайней мере четырех псевдодвуугольников следует из теоремы 4.3. Справедливость теоремы для ВСЕХ гиперболических виртуальных многогранников, а также соответствие псевдодвуугольников рожам мы здесь доказывать не будем.  $\square$

**Пример 9.5.** На рис. 27 изображен невыпуклый граф, обладающий нетривиальным стрессом. Действительно, перед нами разбиение сферы, содержащее четыре псевдодвуугольника, остальные области которого – псевдотреугольники. Сравним его с изображенным на рис. 13. В обоих случаях мы имеем невыпуклый граф с четырьмя псевдодвуугольниками. Однако эти два гиперболических виртуальных многогранника порождают РАЗНЫЕ конфигурации больших полуокружностей, а именно, конфигурации I и II.

Поэтому разумно считать построенные нами два гиперболических виртуальных многогранника существенно разными.

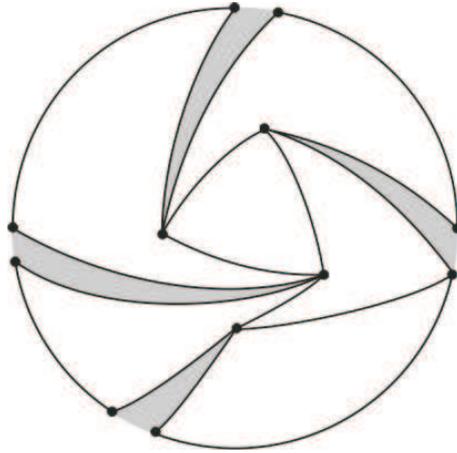


Рис. 27. Четыре псевдотриугольника –Альтернативное расположение

#### 10. ОТКРЫТЫЕ ПРОБЛЕМЫ И ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Особенность этой темы – обилие нерешенных пока задач. Часть из них вероятно доступна для решения студентам (и даже школьникам). Приведенные ниже задачи – сложные, ответы на них пока никому не известны.

**Задача 10.1.** Построить  $P(G, f)$  для графа, изображенного на рис. 27.

**Задача 10.2.** Для изгибаний невыпуклых графов на плоскости справедлива теорема 7.1. Есть ли у нее содержательный аналог для невыпуклых графов на сфере?

**Задача 10.3.** Сколько существует различных (с точностью до изотопии) конфигураций  $k$  больших полуокружностей? Если трудно указать точное число, то какие можно написать для него оценки?

**Задача 10.4.** Как можно разумно расклассифицировать (с точностью до изотопии) конфигурации  $k$  больших полуокружностей?

В статье мы сознательно опустили многие подробности, стремясь составить текст, дающий представление о предмете и взаимосвязь понятий.

Подробное изложение, дополнительные задачи, трехмерные иллюстрации и ссылки можно найти на сайте [9].

Популярно о распрямлении складного метра написано на сайте

<http://www.ams.org/featurecolumn/archive/links1.html>

Для экспериментирования с графами на сфере может пригодиться программа-рисовалка, которая бесплатно скачивается с сайта

<http://page.mi.fu-berlin.de/schulza/>

#### 11. РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ

**Задача 1.2** Можно построить заузленную ломаную с длинными крайними ребрами, которую развязать невозможно.

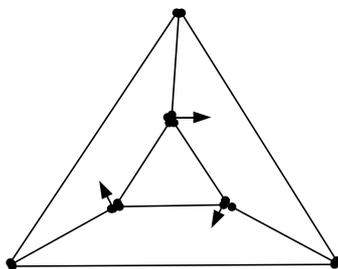


Рис. 28. Жесткий граф с инфинитезимально изгибаемой реализацией

**Задача 2.5** Такой граф приведен на рис 28. Это два симметрично расположенных правильных треугольника. Векторы скоростей вершин внешнего треугольника нулевые, внутреннего треугольника – показаны стрелками.

**Задача 2.7** Рассмотрим трехвалентные вершины. Для них очевидно, что знак стресса соответствует цвету ребра.

**Задача 2.8** Это транспонированная матрица жесткости  $R^T$ .

**Задача 2.15** а и б.

**Задача 2.17** Мы опишем процедуру, ставящую надстройке  $h$  в соответствие стресс  $s$ . Рассмотрим вершину  $i$  и ребро  $(ij)$  нашего графа. К ребру примыкают две области  $t_1$  (эта область лежит справа от ребра если смотреть от вершины  $i$ ) и  $t_2$ . Впрочем, может оказаться, что это одна и та же область. В каждой из этих областей функция  $h$  линейна. В области  $t_1$  она равна некоторой линейной функции  $h_1$ , а в области  $t_2$  – линейной функции  $h_2$ . Рассмотрим их разность  $h_1 - h_2 = a_{ij}x + b_{ij}y + c_{ij}$ , где  $a_j, b_j, c_j \in \mathbb{R}$ . Заметим что вектор  $\mathbf{h}_{ij} = (a_{ij}, b_{ij})$  ортогонален вектору  $\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j$ . Кроме того,  $\mathbf{h}_{ij} = -\mathbf{h}_{ji}$ . Наконец, сумма векторов  $\mathbf{h}_{ij}$  для всех прилегающих к вершине  $i$  ребер равна нулю. Пусть теперь  $\mathbf{h}'_{ij}$  – поворот вектора  $\mathbf{h}_{ij}$  на угол  $\pi/2$  по часовой стрелке. Вектор  $\mathbf{h}'_{ij}$  параллелен ребру  $(ij)$ , а систему векторов  $\mathbf{h}'_{ij}$  можно представить как систему сил, производимых пружинками.

Формально говоря, положим

$$s(i, j) = \begin{cases} \frac{|\mathbf{h}_{ij}|}{|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j|}, & \text{если вектора } \mathbf{h}_{ij} \text{ и } \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j \text{ образуют правую тройку;} \\ -\frac{|\mathbf{h}_{ij}|}{|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j|}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Функция  $s$  является искомым стрессом.

**Задача 5.2** Квадрат.

**Задача 7.2** Нужно заменить эти два ребра на одно жесткое ребро суммарной длины.

## БИБЛИОГРАФИЯ

- [1] А. Д. Александров, *О теоремах единственности для замкнутых поверхностей*, ДАН СССР **22** (1939), № 3, 99-102.
- [2] А. Пухликов, А. Хованский, *Конечно-аддитивные меры виртуальных многогранников*, Алгебра и Анализ **4** (1992), № 2, 161-185.
- [3] J. Graver, B. Servatius, H. Servatius, *Combinatorial rigidity*, Graduate Studies in Mathematics 2. American Mathematical Society 1993.
- [4] G.Ewald, *Combinatorial Convexity and Algebraic Geometry*, Springer 1996.
- [5] Y. Martinez-Maure, *Contre-exemple à une caractérisation conjecturée de la sphère*, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, Math. **332** (2001), № 1, pp.41-44.
- [6] G. Panina, *New counterexamples to A.D. Alexandrov's uniqueness hypothesis*, Advances in Geometry **5** (2005), 301-317.
- [7] G. Panina, *On hyperbolic virtual polytopes and hyperbolic fans*, CESJM **4** (2006), № 2, 270-293.
- [8] I. Streinu, *Pseudo-Triangulations, Rigidity and Motion Planning*, Discrete and Computational Geometry, vol. 34, No. **4** (2005) 587-635.
- [9] Сайт, посвященный гиперболическим виртуальным многогранникам <http://club.pdmi.ras.ru/~panina/hyperbolicpolytopes.html>

*E-mail address:* `gaiane-panina@rambler.ru`

ПАНИНА Г.Ю., ИНСТИТУТ ИНФОРМАТИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ РАН, В.О., 14 линия, д. 39, САНКТ-ПЕТЕРБУРГ, 199178