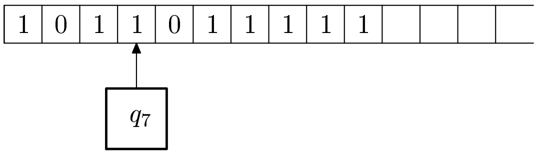
Что такое проблема P vs NP?

Занятие 1. Машины Тьюринга
Определения и задачи

Машина Тьюринга — это совокупность семи объектов $\langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}}\rangle$, где Q, Σ, Γ — конечные множества, причём Q — множество (внутренних) состояний, Σ — входной алфавит, не содержащий специального символа пробела ␣, Γ — ленточный алфавит, содержащий символ ␣ и алфавит Σ, $\delta\colon Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ — функция переходов, $q_0 \in Q$ — начальное состояние, $q_{\text{accept}} \in Q$ — принимающее состояние, $q_{\text{reject}} \in Q$ — отвергающее состояние, причём $q_{\text{accept}} \neq q_{\text{reject}}$. Машина действует следующим образом: она получает на вход слово $w_1 w_2 \dots w_n \in \Sigma^*$ записанным слева на бесконечной вправо ленте, правее входного слова лента заполнена символами пробела ␣. Изначально машина находится в состоянии q_0, головка машины расположена в самой левой клетке ленты. Дальше машина действует по шагам: на каждом следующем шаге если в клетке с головкой машины написан символ $a \in \Gamma$, машина находится в состоянии $q \in Q$, и $\delta(q, a) = (q', b, D)$, то машина записывает в клетку, в которой расположена головка, символ b, меняет внутреннее состояние на q' и перемещает головку на одну клетку влево, если $D = L$, или на одну клетку вправо, если $D = R$. (Попытка сместить головку влево из самой левой клетки машиной игнорируется.) Если внутреннее состояние машины становится q_{accept}, машина завершает работу и принимает изначальное входное слово, если внутреннее состояние становится q_{reject}, машина завершает работу и отвергает слово; иначе машина продолжает работать. Конфигурацией машины Тьюринга называется совокупность внутреннего состояния машины, полного состояния ленты и положения головки машины на ленте. На рисунке приведён пример машины в некоторой конфигурации.



Пусть фиксирован конечный алфавит Σ. Слово — это произвольная конечная последовательность букв алфавита. Язык — это произвольное множество слов. Язык всех слов в алфавите Σ обозначается Σ^*. Язык называется разрешимым, если он разрешается какой-нибудь машиной Тьюринга, то есть если эта машина принимает любое слово этого языка и отвергает любое слово, не принадлежащее языку. Язык называется принимаемым, если он принимается какой-нибудь машиной Тьюринга, то есть если эта машина принимает все слова этого языка и не принимает никаких других (но, возможно, и не отвергает). Многие (любые конечно описываемые) объекты можно кодировать словами в подходящем алфавите: числа, многочлены, графы, формулы, конечные множества, машины Тьюринга, и т. д. Кодирование словом будем обозначать скобками $\langle\cdot\rangle$.

1. Опишите машину Тьюринга, разрешающую язык $\{w\#w : w \in \{0,1\}^*\}$; **а)** $\{0^{2^n} : n \in \mathbb{N}\}$; **б)** $\{a^i b^j c^k : i+j = k,\ i,j,k \geqslant 0\}$; **в)** $\{a^i b^j c^k : ij = k,\ i,j,k \geqslant 1\}$; **г)** $\{w :$ в слове $w \in \{0,1\}^*$ одинаковое количество 0 и 1$\}$; **д)** $\{w :$ в слове $w \in \{0,1\}^*$ количество 0 в два раза больше, чем количество 1$\}$; **е)** $\{w :$ в слове $w \in \{0,1\}^*$ количество 0 не более чем в два раза больше, чем количество 1$\}$; **ж)** $\{\langle p, q\rangle :$ квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корень$\}$; **з)** $\{\langle G\rangle : G$ — связный неориентированный граф$\}$.

2. а) Опишите машину Тьюринга, копирующую входное слово. **б)** Докажите, что для любой такой машины найдётся $\varepsilon > 0$, такое что найдутся сколь угодно длинные слова, на которых машина работает не быстрее, чем за εn^2 шагов, где n — длина слова.

3. Докажите, что **а)** объединение **б)** пересечение **в)** разность **г)** конкатенация **д)** дополнение разрешимых языков является разрешимым языком. **е)** Верно ли всё то же для принимаемых языков?

4. а) Существуют ли неразрешимые языки? **б)** Существуют ли неразрешимые принимаемые языки?

5. Придумайте разные модификации определения машины Тьюринга (количество и вид лент, конечная память, куда и как ходить, и т. п.) и докажите, что все они эквивалентны исходному (в том смысле, что распознаваемые ими языки одни и те же).

6. В недетерминированной машине Тьюринга (в отличие от ранее описанной детерминированной) функция переходов многозначная, и разрешён переход по любому из значений. Слово принимается, если оно принимается хотя бы одним каким-нибудь способом. Докажите, что классы принимаемых языков в детерминированном и недетерминированном случае равны.