В.Ю. Протасов

Наглядная теория экстремума

Задачи к занятию 1. 24 июля 2008

Задача 1. Приведите пример многочлена двух переменных $p(x,y)$, для которого $\inf\limits_{x,y\in\mathbb{R}} p(x,y) = 0$, но этот инфимум не достигается ни в одной точке.

Задача 2. Докажите *принцип максимума модуля* для аналитических функций: если функция $f(z)$ комплексного переменного аналитична в некоторой области, то максимум её модуля не может достигаться во внутренней точке области.

Задача 3. Для гладких замкнутых кривых вписанный k-угольник максимального периметра является биллиардом. Однако для остроугольных треугольников биллиард (треугольный) соответствует не максимальному, а минимальному периметру. Как объяснить это противоречие?

Задача 4. Стороны всех k-угольных биллиардов эллипса касаются некоторого фиксированного эллипса.

Задача 5. Биссектрисы всевозможных углов, одна сторона которых лежит на данной прямой, а другая проходит через данную точку, касаются фиксированной параболы.

Задача 6. На плоскости дана окружность и точка A. На окружности берется произвольная точка N и в ней восставляется перпендикуляр к прямой AN. Тогда
а) Если A лежит внутри окружности, то все такие перпендикуляры касаются эллипса.
б) Если B лежит вне окружности, то все перпендикуляры касаются гиперболы.
в) Соответствует ли “пограничный” случай (A лежит на окружности) параболе ? Сформулируйте и докажите утверждение, аналогичное а) и б) для параболы.

Задача 7. Является ли треугольник единственной плоской фигурой с константой Радона-Минковского равной 2 ? Тот же вопрос про тетраэдр в $\mathbb{R}^3$.

Задача 8. Вычислите константы Радона-Минковского для правильной четырехугольной пирамиды, кругового конуса, треугольной призмы.

Задача 9. Дан шарнирный пространственный четырехугольник $ABCD$, длины сторон которого фиксированы, а углы можно менять. Тогда существует такое положение этого четырехугольника, при котором двугранные углы тетраэдра $ABCD$ при ребрах AC и BD – прямые.

Задача 10. Через произвольную точку внутри выпуклого (бесконечного) конуса можно провести плоскость таким образом, что данная точка будет центром тяжести сечения.

Задача 11. Найдите многочлен наилучшего приближения степени $n = 2$ для функции $f(x) = \sin\,\pi\,x$ на отрезке $[-1,1]$. Тот же вопрос для функции $f(x) = |x|$ при произвольном n.

В.Ю. Протасов, МГУ, Механико-математический факультет,
Воробьевы Горы, Москва, 119992, e-mail: `v-protassov@yandex.ru`