В.Ю. Протасов

Наглядная теория экстремума

Задачи к занятию 2. 25 июля 2008

Задача 1. Если сумма пяти чисел (не обязательно положительных) равна 1, а сумма их квадратов равна 13, то каково наименьшее возможное значение суммы их кубов ?

Задача 2. [Неравенство Гёльдера]. Для любого $p > 1$ и произвольных положительных чисел $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$ выполнено $\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \le \Bigl(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\Bigr)^{1/p} \Bigl(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\Bigr)^{1/q}$, где $q = p/(p-1)$. Для каких x_k и y_k это неравенство обращается в равенство ?

Задача 3. Пусть M – точка внутри тетраэдра $ABCD$, для которой сумма расстояний до вершин минимальна. Тогда противоположные ребра тетраэдра видны из точки M под равными углами, а биссектрисы этих углов лежат на одной прямой.

Задача 4. В пространстве даны две точки и прямая. Для какой точки плоскости сумма расстояний от неё до данных точек и до прямой – наименьшая. Получите два решения – геометрическое и методами теории экстремума.

Задача 5. В пространстве даны три скрещивающиеся прямые. Как выбрать по точке на каждой из этих прямых так, чтобы треугольник с вершинами в этих точках имел наименьший периметр?

Задача 6. Муха летает внутри правильного тетраэдра.
а) Каков кратчайший путь мухи, при котором она побывает на каждой грани ?
б) Тот же вопрос, но теперь известно, что путь – замкнутый.

Задача 7. Дан тетраэдр с ребром 9 см. Паук связал паутину, соединяющую все его вершины. Может ли длина паутины быть меньше 22 см ?

Задача 8. Найти точку P внутри данного треугольника, для которой сумма отношений длин сторон треугольника к расстояниям от P до этих сторон минимальна.

Задача 9. Точка удалена от вершин прямоугольного треугольника на 2, 5 и 10 см. (2 – расстояние до вершины прямого угла). Какова может быть наибольшая площадь этого треугольника ?

Задача 10. Кривой наименьшей возможной длины разделить а) равносторонний треугольник б) квадрат на две части равной площади. Будьте осторожны с кажущимся сходством пунктов (а) и (б) !

Задача 11. Любое движение трехмерного пространства, имеющее неподвижную точку имеет и неподвижную прямую.
Указание. Считаем, что движение A оставляет на месте начало координат. Рассмотрите задачу $(Ax, x) \to \max$ при условии $|x| = 1$.

В.Ю. Протасов, МГУ, Механико-математический факультет,
Воробьевы Горы, Москва, 119992, e-mail: `v-protassov@yandex.ru`