Понятие игры

Мы будем рассматривать рациональное принятие решений независимым игроками при том, что решение одного может повлиять на всех. Разумеется, нам понадобятся формальные определения, которые можно дать несколькими способами.

Мы считаем поведение игроков рациональным в следующем смысле: когда игра закончена, у игроков возникают некоторые выигрыши. Единственной целью каждого игрока мы будем считать максимизацию его выигрыша.

Самое простое определение — игра в нормальной форме. В таких играх все игроки одновременно один раз принимают по одному решению, не зная о решениях друг друга.

Определение 1. *Игра в нормальной форме* задаётся множеством игроков M (обычно игроков два или три, но может быть и бесконечно много), множеством стратегий для каждого игрока $S_m, m \in M$ и набором платёжных функций $p_m : \prod\limits_{k \in M} S_k \to \mathbb{R}$. Каждая платёжная функция задаёт выигрыш игрока m, если известен набор $s_m \in S_m$ стратегий всех игроков.

Зададим в этом виде какую-нибудь простую игру. Например, можно рассмотреть игру, в которой один загадывает число, а другой хочет угадать, чётное оно или нечётное.

Пример 1. Угадывание бита задаётся множеством игроков из двух элементов, стратегическими множествами $\{0, 1\}$ для каждого игрока и платёжными функциями

$$p_1(s_1, s_2) = \begin{cases} -1, s_1 = s_2 \\ 1, s_1 \neq s_2 \end{cases}$$

$$p_2(s_1, s_2) = \begin{cases} 1, s_1 = s_2 \\ -1, s_1 \neq s_2 \end{cases}$$

Пример 2. В игре ‘‘встреча’’ два игрока, по две стратегии у каждого, а платёжная функция игроков совпадает и равна 0, если выбранные стратегии различны и 1, если они совпадают.

Замечание 1. Вполне допустимо, чтобы сумма выигрышей игроков не была равна 0.

1. Можно ли представить игру ‘‘крестик-нолики’’ как игру в нормальной форме?

Пример 3. Игра ‘‘делёж фигуры’’. У этой игры можно рассматривать много вариантов.

Сначала надо выбрать размерность пространства, в котором идёт игра и фигуру в нём (возможно, всё пространство).

Кроме того, следует зафиксировать конечное или счётное множество игроков.

Стратегия игрока — точка, лежащая в фигуре.

Выигрыш игрока — объём той части фигуры, точки которой ближе к нему, чем к любому другому игроку, если эта часть конечна. При совпадении стратегий подсчитывается выигрыш, как если бы в этой точке был один игрок и выигрыш делится поровну.

Если объём ‘‘принадлежащей’’ игроку части бесконечен, то выигрыш принимается равным некоторому заранее выбранному значению (в принципе, даже не обязательно, чтобы оно было положительно).

Всё предыдущее относилось исключительно к тому, что игроки имеют право делать и что им за это будет. Теперь, когда у нас есть примеры игр, можно подумать, а что мы надеемся про них сказать. Сначала можно попытаться отсеять стратегии, которые точно не надо выбирать.

Определение 2. Стратегия s игрока m *нестрого доминирует* стратегию s' того же игрока, если для любого фиксированного набора стратегий остальных игроков выигрыш игрока m при стратегии s не меньше, чем при стратегии s', причём для какого-то набора стратегий других игроков неравенство строгое. При этом стратегия s' называется *нестрого доминируемой*. Если неравенство строгое при каждом наборе стратегий остальных игроков, то стратегия s' называется *строго доминируемой*.

Замечание 2. Например, если окажется, что игрок вообще один, то строго доминируемыми являются все стратегии, кроме тех, которые приносят максимальный выигрыш.

Если мы считаем, что игроки стремятся максимизировать свой выигрыш и ничего не знают про действия других игроков, то они точно не должны пользоваться строго доминируемыми стратегиями.

2. Есть ли доминируемые стратегии в угадывании бита?

3. Есть ли доминируемые стратеги в игре ‘‘встреча’’?

Определение 3. Игра в ‘‘самооценку’’. Каждый из n игроков выбирает по числу от 1 до 100. Выигрыш игрока равен разности между его числом и средним выбранных чисел.

4. Есть ли доминируемые стратегии в игре в самооценку?

5. Пусть имеется игра в нормальной форме с конечным множеством игроков и конечным числом стратегий у каждого игрока. Выкинем из множеств стратегий все строго доминируемые. В оставшейся игре опять выкинем все строго доминируемые (уже в смысле новой игры), и будем повторять этот процесс, пока хотя бы у одного игрока есть хотя бы одна строго доминируемая стратегия.
а) докажите, что процесс всегда закончится, но не обязательно после первого выкидывания строго доминируемых стратегий;
б) докажите, что если выкидывать по одной строго доминируемой (на момент выкидывания) стратегии, то получится тот же результат при любом порядке выбрасывания.

6. Приведите пример игры, в которой, выкидывание нестрого доминируемых стратегий может привести к различным играм, в которых его нельзя продолжить.

7. Существует ли игра, в которой любая стратегия может быть выкинута при какой-то последовательности выкидывания нестрого доминируемых стратегий?

Традиционным подходом в теории игр является рассмотрение равновесий — устойчивых в каком-то смысле наборов стратегий игроков.

Например можно задаться таким вопросом: может ли введение правила безо всяких наказаний за невыполнение поменять поведение игроков, ранее его не соблюдавших? Да, может. Примером может служить висящее в некоторых крупных магазинах объявление, говорящее, где в магазине ''положено'' встречаться потерявшим друг друга в толпе.

Определение 4. *Равновесием Нэша* называется такой набор стратегий, что никакому игроку невыгодно отклоняться от своей стратегии в этом наборе. Более точно, если зафиксировать стратегии всех игроков, кроме одного, в соответствии с равновесием, то у оставшегося игрока нет стратегии, дающей строго больший выигрыш, чем та, которую предлагает равновесие Нэша.

Определение 5. ''Дилемма заключённых''. Игроков два (''заключённые''), у каждого есть две стратегии поведения на допросе: ''сотрудничество'' и ''отказ''. Если оба заключённых помогают следствию, они получают небольшие сроки (выигрыш -2). Если оба заключённых отказываются сотрудничать, они получают условное наказание по другому обвинению (выигрыш -1). Если сотрудничать соглашается только один, то его оправдывают (выигрыш 0), а второй получает максимальное наказание (выигрыш -3).

Позитивный вариант: каждый из двух глав лабораторий может либо получить грант размера N для своей лаборатории, либо (как эксперт без прямой заинтересованности) убедить выдать вдвое больший грант для другой лаборатории.

Замечание 3. Выигрыши положительного варианта отличаются прибавлением 3 и умножением на N, то есть игра должна быть той же самой.

Равновесия Нэша — одно из основных понятий теории игр. Они отражают устойчивые исходы при неспособности игроков договориться.

8. Найдите все равновесия Нэша в играх ''угадывание бита'', ''встреча'', ''дилемма заключённых'', ''самооценка''.

Полушутливый сюжет к следующей задаче — выбор партиями перед выборами позиции по важному вопросу.

9. Найдите все равновесия Нэша в дележе отрезка а) двумя, б) тремя игроками.

10. Опишите все равновесия Нэша при дележе прямой счётным числом игроков, в которых все игроки получают ненулевой выигрыш и не появляется бесконечных частей.

11. Докажите, что при выкидывании строго доминируемых стратегий множество равновесий Нэша не изменяется. Может ли оно измениться при выкидывании нестрого доминируемых стратегий?

12. Найдите все равновесия Нэша в дилемме заключённых, если один или оба игрока минимизируют, а не максимизируют свой выигрыш.

Определение 6. ‘‘Встреча с предпочтениями’’. n человек хотят пойти друг к другу в гости. Каждый выбирает, к кому отправиться в гости (или остаться дома и ждать гостей). Выигрыш игрока, оставшегося дома, равен числу пришедших гостей. Выигрыш каждого гостя на μ меньше. Выигрыш человека, не заставшего хозяина дома, равен $-\mu$.

13. Найдите в игре ‘‘встреча с предпочтениями’’ равновесия Нэша в зависимости от параметра домоседства μ и количества людей n

Замечание 4. μ может быть и отрицательно.

Определение 7. ‘‘Работа и проверка’’. Есть работодатель и работники. Работник может работать старательно или плохо. Работодатель может проверить работника. От каждого хорошо работающего работника работодатель приобретает выигрыш 10, от плохо работающего — только 4. Если работник работает хорошо, он в любом случае получает выигрыш 8. Если работать плохо и не быть проверенным, то выигрыш будет 10, но в случае проверки выигрыш работника будет лишь 4.

14. Найдите равновесия Нэша в игре ‘‘работа и проверка’’, если
а) Работник один, работодатель может его проверять или нет.
б) Работников двое, работодатель может проверить только одного из них.

Определение 8. Рассмотрим симметричную игру, заданную следующей таблицей:

$8, 8$	$6, 16$	$5, 2$	$7, 10$
$16, 6$	$15, 15$	$13, 4$	$14, 12$
$2, 5$	$4, 13$	$3, 3$	$1, 11$
$10, 7$	$12, 14$	$11, 1$	$9, 9$

Игроков два, первый выбирает столбец, второй строку. Первое число в клетке задаёт выигрыш первого, второе число — выигрыш второго. Будем называть эту игру ‘‘сотрудничество’’. Причины этого ясны из свойств равновесий Нэша в ней.

15. В игре ‘‘сотрудничество’’ найдите все чистые равновесия Нэша, если
а) оба игрока максимизируют свои выигрыши (как обычно)
б) один из игроков минимизирует свой выигрыш (то есть играет, как если бы его выигрыши имели другой знак)
в) оба игрока минимизируют свои выигрыши

г) оба игрока максимизируют сумму выигрышей игроков

д) оба игрока минимизируют сумму выигрышей игроков

Разумеется, таблица подбиралась под ответы в предыдущей задаче. Подумайте, как легче всего подобрать такую таблицу (для подбора достаточно бумаги и ручки, и не надо решать уравнений).

В ''угадывании бита'' равновесий Нэша не оказалось. На этом примере видно, чем в некоторых ситуациях неудачно равновесие Нэша в той формулировке, которую мы использовали: оно требует точного знания обоими игроками действий партнёра. Можно разрешить игрокам объявлять только вероятности использования стратегий. Непосредственный выбор при этом делается случайным образом в соответствии с объявленными вероятностями.

Определение 9. Пусть задана игра в нормальной форме. Смешанной стратегией для игрока m называется распределение вероятностей на его множестве стратегий S_m. Элементы S_m при этом называются *чистыми стратегиями* и отождествляются с распределениями вероятностей, при которых они имеют вероятность 1. При этом подразумевается, что каждый игрок выбирает свой ход случайно и независимо от других с распределением вероятностей, заданным его смешанной стратегией. Если для каждого игрока задана смешанная стратегия, то выигрышем игрока при данном наборе смешанных стратегий называется математическое ожидание его выигрыша при случайных независимых ходах всех игроков, распределённых в соответствии с заданными смешанными стратегиями.

Определение 10. По каждой игре в нормальной форме с конечными (для бесконечных всё так же, но появляются тонкости в определении, которыми мы заниматься не будем) множествами игроков и стратегий для каждого игрока естественным образом строится игра в нормальной форме, стратегиями в которой являются смешанные стратегии. Равновесие Нэша в исходной игре будем называть также ''равновесие в чистых стратегиях'', а в новой — ''смешанное равновесие Нэша'' (''равновесие Нэша в смешанных стратегиях'').

16. Найдите равновесия Нэша в смешанных стратегиях в игре ''угадывание бита''.

17. Найдите все смешанные равновесия Нэша в дилемме заключённых.

18. Найдите смешанные (и выделите симметричные смешанные) равновесия Нэша для игры ''встреча с предпочтениями'' в зависимости от μ при n, равном

а) 2, б) 3, в) 4, г) произвольному натуральному числу.

19. Найдите смешанные равновесия Нэша в игре ''работа и проверка'', если

а) Работник один, работодатель может его проверять или нет.

б) Работников двое, работодатель может проверить только одного из них.

Определение 11. ''Прятки''. Прячущийся выбирает одно из четырёх мест, занумерованных $1, 2, 3, 4$. Ищущий проверяет одно из них. Если он находит, то получает за это выигрыш

10, а прячущийся несёт потерю 10. Если выигрывает прячущийся, он выигрывает 1, а ищущий несёт потерю, равную номеру места, которое проверил (ходить далеко ему).

20. Найдите смешанные равновесия в игре в прятки.

Теперь можно задаться вопросом о том, как связано понятие смешанного равновесия и доминирования.

21. Меняется ли множество смешанных равновесий Нэша при выкидывании строго доминируемых стратегий? Нестрого доминируемых стратегий?

22. Если в игре есть смешанное равновесие Нэша, то все чистые стратегии, входящие в смешанную стратегию игрока с ненулевыми весами, дают один и тот же выигрыш, равный выигрышу от смешанной стратегии.

23. Верно ли, что если в игре есть равновесие Нэша в чистых стратегиях, то оно является смешанным равновесием Нэша? Верно ли, что если в игре есть равновесие Нэша для чистых стратегий, то во все смешанные равновесия Нэша входят с ненулевыми вероятностями только стратегии, входящие хотя бы в одно равновесие Нэша в чистых стратегиях? Верно ли, что строго доминируемые стратегии не могут входить с ненулевыми вероятностями в смешанное равновесие Нэша? Верно ли это для нестрого доминируемых стратегий?

24. а) Пусть в игре есть два игрока, две стратегии и при каждом выборе стратегий сумма выигрышей игроков равна 0. Докажите, что существует смешанное равновесие Нэша;
б)* Что, если стратегий каждого игрока большое (но конечное) количество?

Эта задача умышленно была смещена после теоретических вопросов..

25. Найдите все смешанные равновесия Нэша в игре ‘‘сотрудничество’’.

Замечание 5. Не надо при этом решать систему уравнений, хотя в иногда это и бывает необходимо.

Определим теперь формально игры, в которых делается несколько ходов подряд.

Определение 12. *Дерево с корнем* задаётся множеством вершин V и отображением $p: V \to V$ со следующими свойствами: существует одна вершина $r \in V$ (корень), такая что $p(r) = r$, а для любой другой вершины $v \in V$ в последовательности $v_0 = v, v_{n+1} = p(v_n)$ с какого-то места повторяется вершина r. При этом вершина $p(v)$ называется родителем вершины v. *Листом* называется вершина дерева, не являющаяся родителем никакой вершины, остальные вершины называются внутренними. *Основа игры в развёрнутой форме* задаётся деревом возможных игровых позиций $T = (V, p)$; множеством игроков M с выделенным игроком m_0--- ‘‘природой’’; выигрышем $p_m(u)$ в каждом листе u и на каждой бесконечной ветви $u = (u_0 = r, u_1, \dots, u_n, \dots)$ с условием $p(u_{n+1}) = u_n$ для каждого игрока $m \neq m_0$; и игроком $m(u)$, которому принадлежит ход, для каждой внутренней вершины u.

Определение 13. Детерминированная игра в развёрнутой форме с полной информацией задаётся основой игры в развёрнутой форме, в которой нет вершин, в которых ходит природа. Игроки выбирают стратегии, то есть для каждой вершины $v \in V$ игрок $m(u)$ фиксирует вершину $n(v), p(n(v)) = v$, в которую он пойдёт из этой вершины. Выбор стратегий задаёт единственную последовательность игровых позиций, $(r, n(r), n(n(r)), \ldots)$, на которой определены выигрыши. Так игра сводится к нормальной форме.

26. Игра ''захват рынка''. Два игрока — монополист и новый игрок. Сначала новый игрок решает, пытаться ли ему захватить рынок. Если он отказывается, игра заканчивается, он получает 0, монополист 2. Потом монополист решает, ронять ли цены. Если он это делает, он выигрывает 0, а новый игрок -1. Если он этого не делает, выигрыши обоих игроков равны 1. Найти все равновесия Нэша.

27. Описать все равновесия Нэша в игре ''крестики-колики 3 на 3''. Есть ли среди них равновесие, не ведущее к ничьей? Есть ли среди них равновесие, в котором в какой-то позиции стратегия игрока предписывает не делать единственный ход, позволяющий не проиграть?

28. Докажите, что в детерминированной игре в развёрнутой форме с полной информацией с конечным числом игровых позиций есть равновесие Нэша.

Определение 14. Равновесие в детерминированной игре с совершенной информацией называется *совершенным на подыграх*, если для каждой игровой позиции ограничение стратегий на её потомков даёт в ограниченной игре равновесие Нэша.

29. Найдите все совершенные на подыграх равновесия в игре ''захват рынка''.

30. Докажите, что в детерминированной игре в развёрнутой форме с полной информацией с конечным числом игровых позиций есть равновесие Нэша, совершенное на подыграх.

Есть простой пример игры в развёрнутой форме, в котором предположение рациональности приводит к неестественным результатам.

31. ''Пожертвование''. Два игрока — главы, скажем, образовательных учреждений — разговаривают с меценатом. Он предлагает пожертвовать одну копейку первому учреждению; если первый игрок отказывается — предлагает пожертвовать две копейки второму учреждению; затем четыре копейки первому, и так далее. Когда он хочет предложить сумму больше миллиарда рублей, он её просто жертвует тому учреждению, которому предложил бы её по очереди. Игроки хотят получить максимальное пожертвование, каждый — для своего учреждения. Какие в этой игре равновесия? Совершенные на подыграх равновесия?

В этом месте можно упомянуть понятие функции полезности. На самом деле, заявленный выигрыш может быть указан не в единицах, в которых осмысленно говорить о максимизации математического ожидания. Например, пожертвование в 1 копейку может вообще не восприниматься как что-то лучшее, чем ничего. Поэтому иногда каждому исходу надо отдельно сопоставить значение полезности. Игроки максимизируют математическое ожидание полезности. Указать реалистичные полезности — отдельное, не математическое, искусство.

Определение 15. Детерминированная игра с неполной информацией задаётся основой игры в развёрнутой форме без вершин, где ходит природа, и отношением эквивалентности — неотличимостью для ходящего игрока. На отношение эквивалентности накладываются следующие условия: а) в эквивалентных вершинах ходит один и тот же игрок; б) для любой пары эквивалентных вершин u, v и любого хода в одной из них $w, p(w) = u$, есть ход из второй вершины $w_1, p(w') = v$, ведущий в эквивалентную первому ходу вершину, причём ровно один; в) игрок отличает позиции, в которых он сделал разное число ходов, а также позиции, полученное за одно и то же число ходов из неэквивалентных. Разрешённые стратегии — такие же, как в игре с полной информацией, но из эквивалентных вершин надо ходить в эквивалентные. Выигрыши определяются так же.

Замечание 6. Последнее условие на эквивалентность означает, что игрок помнит, что он делал. При этом он не знает, делали ли ли ход другие игроки.

Замечание 7. В принципе, можно было бы и не накладывать этого последнего условия, но при этом появляются паразитные явления.

32. Докажите, что любая игра в нормальной форме эквивалентна игре в развёрнутой форме с неполной информацией.

Таким образом, два представления игр в сущности одинаковы, но позволяют обратить внимание на разные тонкости.

Например, можно рассмотреть, что меняется в дилемме заключённых от того, что игра повторяется много раз.

33. ‘‘Повторяемая дилемма заключённых’’. Пусть два игрока играют в ‘‘дилемму’’ бесконечно много раз подряд, причём каждый раз ставки падают на 1 процент. Тогда для любой пары стратегий игроков ряд выигрышей сходится, и можно задать бесконечную игру в развёрнутой форме. Докажите, что в ней есть равновесие Нэша, совершенное на подыграх, при розыгрыше которого оба игрока всегда отказываются от сотрудничества со следствием (‘‘кооперативная’’ стратегия в дилемме заключённых).

34. Можно ли достичь того же результата путём конечного многократного повторения фиксированное число раз?

Определение 16. Игра с неполной информацией отличается от детерминированной игры с неполной информацией тем, что а) позиций обязательно конечное число; б) разрешены вершины, где ходит природа, причём в каждой такой вершине задано распределение вероятностей на дочерних вершинах; в) игрокам разрешено для каждого информационного множества (класса эквивалентности вершин, где они ходят) указать распределение вероятностей на своих ходах (из-за условия про единственный эквивалентный ход это корректно). Выигрыш определяется естественным образом как математическое ожидание выигрыша при розыгрыше игры с независимым случайным выбором хода по указанному распределению в каждой вершине.

35. Докажите, что при отсутствии вершин, где ходит природа, стратегии игроков в игре с неполной информацией — это то же, что и смешанные стратегии в детерминированной игре с неполной информацией.

Определение 17. ''Петербургский парадокс''. Первый игрок называет сумму, которую он готов заплатить второму игроку за проведение игры. Второй игрок может согласиться или потребовать смены ролей с той же ставкой. Если он соглашается, то он получает оговорённую оплату, после чего бросает симметричную монету, пока не выпадет орёл, платя за первое выпадение решки 1 рубль, а за каждое последующее — в два раза больше. Иначе ту же сумму платит он, а бросает монету и платит за выпадения решки первый.

36. Есть ли равновесия Нэша в Петербургском парадоксе?

Можно задать и вопрос про реалистичность ответа. Готовы ли вы сыграть в эту игру, заплатив 10000 рублей за участие, если Вам гарантируется, что второй согласится?

Если уж говорить о парадоксах, можно упомянуть парадокс лишнего знания.

Определение 18. ''Делёж рынка''. Есть две фирмы — лидер и преследователь. Лидер может производить продукцию за a рублей за единицу, а преследователь — за b рублей. Есть предельная цена, которую кто-либо готов платить, M рублей. Каждый выбирает объём производства в штуках, после чего весь товар расходится по цене $M - Q$, где Q — суммарное производство. Каждая фирма хочет максимизировать свою прибыль.

37. Какое равновесие Нэша в дележе рынка если преследователь выбирает объём выпуска одновременно с лидером (не знаю выбор лидера) и если преследователь знает решение лидера при принятии своего решения? Издержки считайте равными.

Почему преследователю невыгодно иметь дополнительную информацию?