Сначала два примера, которые всплыли на лекции, хотя не были включены в оценку сверху плана на неё.

Определение 1. Игра ‘‘бессмысленное голосование’’. Нечётное число игроков (обычно три) голосуют по вопросу, получить ли им всем одновременно полезность 1 или остаться с выигрышем 0.

1. Найдите все равновесия Нэша в бессмысленном голосовании.

Таким образом, может существовать равновесие, которое для всех игроков строго хуже другого равновесия Нэша.

Замечание 1. Особенно любопытной будет эта игра, если назначить за голосование, отличное от мнения большинства штраф величиной $\frac{1}{10}$.

2. Найдите все равновесия Нэша в игре ‘‘встреча’’ с 3 игроками и 3 местами для встречи. Не забудьте про неудачные равновесия.

Рассмотрим теперь ситуации, в которых имеет смысл говорить о договорённостях. Можно рассматривать даже просто равновесие Нэша как некоторую возможность для достижения договорённости — договорённости, которая может соблюдаться, даже не будучи формально обязывающей. Это особенно хорошо видно на примере игр в развёрнутой форме, например ‘‘захват рынка’’. Требование совершенства на подыграх в этом случае означает, что, имея возможность позже передумать и отклониться от договорённости (уже получив что-то от факта её изначального существования), игрок всё равно не получит от такого отклонения выгоды.

Особый вид игр в развёрнутой форме — это бесконечные повторения конечных игр (заданных в развёрнутой или нормальной форме). Например, при бесконечном повторении дилеммы заключённых будущая польза от дальнейшего сотрудничества может перевесить сиюминутную выгоду.

Можно придать дополнительную силу смешанным стратегиям. В исходном определении игроки выбирают случайным образом свои стратегии независимо друг от друга. Можно рассмотреть другую ситуацию: игроки выбирают распределение вероятностей наборов стратегий (при этом выбор текущего набора стратегий осуществляет внешний центр доверия). Равновесность заключается в том, что никакому игроку нет смысла отклоняться от рекомендованной стратегии.

Определение 2. Коллективная смешанная (коррелированная) стратегия в игре в нормальной форме — это распределение вероятностей на наборах стратегий (по одной в наборе для каждого игрока). Если игроки используют коллективную смешанную стратегию, то специальное устройство вероятностно вырабатывает стратегии и сообщает каждому игроку его рекомендованную стратегию. Выигрыш в данном случае найти даже проще, чем при использовании смешанных стратегий, так как нам не надо перемножать вероятности выборов стратегий каждым игроком для определения вероятности исхода.

Определение 3. Коллективная смешанная стратегия Σ называется равновесной, если для любых игрока и его стратегии s максимум математического ожидания выигрыша игрока при условии, что выбор в соответствии с Σ рекомендует ему s и другие игроки следуют рекомендациям, достигается на s (и, возможно, каких-то других стратегиях).

Это определение, на самом деле, очень близко к определению равновесия Нэша в смешанных стратегиях.

Определение 4. ‘‘Встреча на лыжне’’. Два лыжника едут по лыжне навстречу друг другу. Каждый может уступить или нет. Если оба уступают, то выигрыши по 2 единицы полезности. Если ни один не уступает, то они сталкиваются, чему мы припишем полезность -1. Иначе уступивший получает полезность 0, а второй полезность 3.

3. Найдите все чистые равновесия Нэша при встрече на лыжне.

4. Найдите все смешанные равновесия Нэша при встрече на лыжне.

5. Постройте симметричную равновесную коллективную смешанную стратегию для встречи на лыжне, которая
а) лучше, чем симметричное смешанное равновесие Нэша;
б) лучше, чем симметричное смешанное равновесие и обеспечивает максимальную (для симметричной равновесной стратегии) вероятность исхода, когда оба уступают.

Можно разрешить игрокам и просто заключать договорённости, которые невозможно нарушить. Если разрешить только договорённости, включающие всех игроков, то получится довольно слабое определение.

Определение 5. Набор стратегий игроков в игре называется эффективным по Парето, если не существует набора стратегий, при использовании которых выигрыши всех игроков строго больше, чем при использовании исходно рассматриваемого.

Таких исходов может быть довольно много.

6. Приведите пример игры, в которой все исходы эффективны по Парето (и их больше одного).

Можно рассматривать и локальные договорённости, заключаемые несколькими игроками. При этом принято рассматривать несколько по-другому определённые игры.

Определение 6. Игра в коалиционной форме задаётся множеством игроков и функцией, которая по коалиции — подмножеству множества игроков — сообщает множество наборов выигрышей, которые может обеспечить данная коалиция своим членам. Естественно считать, что множество векторов выигрышей замкнуто вниз (можно выкидывать полезные вещи) и выпукло.

Исход игры — разбиение игроков на коалиции с указанием выигрышей игроков. Для каждой реализованной коалиции набор выигрышей игроков должен лежать в образе коалиции (то есть быть разрешённым).

Исход называется доминируемым, если существует коалиция, которая обеспечивает всем свои участникам выигрыш строго больший, чем выигрыш при рассматриваемом исходе.

Ядром игры называется множество всех недоминируемых исходов.

Считается, что игроки всегда могут уменьшать свой выигрыш.

Определение 7. ‘‘Делёж сокровища’’. Три игрока делят мешок золота и должны утвердить раздел голосованием.

7. Какое ядро у дележа сокровища?

Определение 8. ‘‘Трубопроводы’’. Имеется направленный граф трубопроводов с выделенными источником и стоком. Для каждого ребра известна пропускная способность. Каждое ребро контролирует какой-то игрок (игроков столько, сколько рёбер). Коалиция может объединить свои трубопроводы, получить систему с какой-то пропускной способностью от источника к стоку, и объявить своим общим выигрышем эту пропускную способность.

8. Найдите ядро игры ‘‘трубопроводы’’.

Замечание 2. Есть теорема Форда-Фалкерсона: максимальный поток равен пропускной способности минимального разреза. Здесь максимальный поток — выигрыш коалиции из всех игроков; разрезом называется произвольное деление вершин графа на ‘‘близкие к источнику’’ (куда входит сам источник) и ‘‘близкие к стоку’’ (куда входит сток); пропускная способность разреза — это сумма пропускных способностей всех рёбер из близких к источнику вершин в близкие к стоку.

9. Пусть в игре все члены каждой коалиции делят выигрыш поровну. Докажите, что ядро этой игры непусто.

Определение 9. Смешанный коалиционный исход задаётся весами коалиций и выигрышами. При этом требуется:
1) Для каждого игрока сумма весов коалиций, в которых он участвует, равна 1.
2) Каждая коалиция с положительным весом выбирает допустимый набор выигрышей своих участников и выплачивает его, умножив на свой вес.

Исход называется равновесным, если ни одна из коалиций не может обеспечить сразу всем своим участникам строго больше, чем в этом исходе.

Определение 10. В игре ‘‘разрешена передача полезности’’, если всякий игрок может уменьшить свой выигрыш для того, чтобы на ту же величину увеличить выигрыш заданного игрока.

Замечание 3. Игроку полезно это делать, если чуть менее эффективный исход для другого игрока даёт большую отдачу ему.

Замечание 4. Полезная переформулировка: каждая коалиция имет некоторый доход, который делит по своему усмотрению. Обозначим доход коалиции K как $p(K)$.

Определение 11. Пусть дана коалиционная игра с передачей полезности и упорядочение игроков. Тогда можно рассмотреть вектор полезности игроков в данном порядке — вектор изменения выигрыша коалиции от добавления игроков в данном порядке. Другими словами, $x_k = p(\{1, \ldots, k\}) - p(\{1, \ldots, k\})$.

Вектор Шепли — среднее всех $n!$ таких векторов.

10. Вектор Шепли - единственный симметричный линейный оператор $\mathbb{R}^{2^n} \to \mathbb{R}^n$, такой что игрок, добавление которого никогда не меняет выигрыш коалиции, получит 0 и сумма координат образа равна выигрышу коалиции всех игроков.

Определение 12. ‘‘Голосование’’ с правом вето, предателями и порогом. Имеется n игроков, порог принятия решения m, множество игроков с правом вето v и множество предателей t. Цель каждой коалици и — пролоббировать некоторое решение и получить общую полезность 1. Для этого коалиции необходима численность m, участие в ней всех игроков из v и отсутствие игроков из t (чтобы избежать клейма шпионской сети и разгрома).

11. Найдите вектор Шепли для голосования с 15 участниками, порогом 8, 5 игроками с правом вето и без предателей.

Найдите ядро этой же игры. Входит ли в него вектор Шепли?

Определение 13. Игра с передачей полезности называется супермодулярной, если объединение двух коалиций имеет выигрыш не меньше суммы выигрышей исходных коалиций, уменьшенной на выигрыш пересечения коалиций.

12. Является ли игра ‘‘трубопроводы’’ супермодулярной?

13. Бывает ли игра в голосование при каких-то параметрах супермодулярной?

14. Докажите, что для супермодулярной игры ядро содержит все векторы полезности игроков в произвольном порядке и все их выпуклые комбнации.