Докажем теорему о существовании смешанного равновесия Нэша (и даже более сильный факт).

Определение 1. *Выпуклой оболочкой* множества векторов $\{v_1, \ldots, v_k\}$ называется множество всех векторов, представимых в виде $\sum\limits_{j=1}^{k} c_j v_j, \forall j\, c_j \geqslant 0, \sum\limits_{j=1}^{k} c_j = 1$. Выпуклым множеством в векторном пространстве называется множество, равное своей выпуклой оболочке.

1. Выпуклая оболочка множества векторов содержится в их линейной оболочке. Верно ли, что каждый вектор из линейной оболочки пропорционален какому-то вектору из выпуклой оболочки?

Определение 2. *Триангуляцией* симплекса называется разбиение его на меньшие симплексы, не имеющие общих внутренних точек, такое что если два симплекса пересекаются, то они имеют общую вершину, и их пересечение равно выпуклой оболочке общих вершин.

2. (Лемма Шпернера) Пусть дан симплекс T с вершинами $v_1, \ldots, v_k$. Пусть он триангулирован и каждая вершина разбиения помечена одним из чисел $1, \ldots, k$. Пусть при этом каждая точка, лежащая в выпуклой оболочке подмножества S вершин T (то есть на грани в широком смысле этого слова) помечена номером одной из вершин этой грани (в частности, вершина T v_j помечена своим исходным номером j). Тогда симплексов разбиения, среди пометок на вершинах каждого из которых встречаются все числа $1, \ldots, n$, нечётное число (и, следовательно, не 0).

3. Докажите, что непрерывное отображение симплекса в себя имеет неподвижную точку.

Для нескольких дальнейших задач нужно небольшое знание и понимание топологии.

4. Докажите, что все выпуклые компакты с непустой внутренностью в n-мерном пространстве над полем $\mathbb{R}$ гомеоморфны.

5. (Теорема Брауэра) Докажите, что непрерывное отображение выпуклого компакта в конечномерном пространстве в себя имеет неподвижную точку.

6. Верна ли теорема Брауэра для невыпуклых компактов? Некомпактных выпуклых множеств?

Определение 3. *Соответствием* между множествами X и Y называется подмножество множества $X \times Y$, или, что то же самое, отображение из X в множество подмножеств Y. Соответствие между топологическими пространствами называется замкнутым, если оно замкнуто как подмножество $X \times Y$.

7. (Теорема Какутани) Пусть X — выпуклый компакт. Пусть F — замкнутое соответствие между X и X и образ каждой точки непустой и выпуклый. Тогда существует точка x_*, соответствующая сама себе.

8. Верна ли теорема Какутани для соответствий на невыпуклых компактах? На выпуклых некомпактных множествах? Для незамкнутых соответствий? Для соответствий с невыпуклыми образами точек?

9. Верна ли теорема Брауэра для компактов в бесконечномерном векторном пространстве?

10. (Теорема Нэша) а) Докажите, что если множества стратегий игроков - выпуклые и компактные, а функции выигрыша непрерывные по всем переменным и выпуклые вверх по своей стратегии игрока, то существует равновесие Нэша;
б) Докажите, что при конечном числе чистых стратегий существует смешанное равновесие Нэша.

Определение 4. Смешанная стратегия называется *вполне смешанной*, если она включает все чистые с положительными вероятностями. Смешанное равновесие Нэша $\sigma_i, i \in M$ называется *совершенным*, если существует последовательность вполне смешанных наборов стратегий игроков $\sigma_{i,n} \to \sigma_i$, такая что для любого n σ_i не хуже никакой другой стратегии игрока, если остальные игроки используют стратегии $\sigma_{\cdot,n}$.

11. Докажите, что в игре с конечным числом игроков и стратегий у каждого игрока есть совершенное равновесие.

12. Можно ли в предыдущей задаче доказать существование совершенного равновесия и такого ε, что если изменить все вероятности во всех стратегиях не более, чем на ε, то оптимальным ответом (не хуже никакого другого) для каждого игрока будет его стратегия из совершенного равновесия?

13. В задачах на поиск равновесий Нэша, где есть более одного смешанного равновесия, найдите совершенные равновесия.

14. Могут ли сильно доминируемые стратегии входить в совершенные равновесия? А слабо доминируемые?

Одной из причин рассмотрения совершенных равновесий было желание избавиться от слабо доминируемых стратегий, входящих в равновесие.

Определение 5. ‘‘Труэль’’. Есть три игрока, желающие убить друг друга. Они решили встать по кругу и стрелять по очереди, пока не останется только один. Каждый раз, когда приходит очередь игрока стрелять, он выбирает, в кого из противников он целится (возможно, ни в кого) и стреляет. После этого он либо — с вероятностью, которую мы будем называть меткостью — убивает того, в кого стрелял, либо промахивается и все остаются живы.

15. Найдите равновесия Нэша в труэли с участниками с меткостями 1, 0.9, 0.7.

Кто имеет наилучшие шансы выжить?

Это пример того, что быть сильнее не всегда лучше. Другой пример — опасность почти надёжной защиты.

Определение 6. ‘‘Ракетная угроза’’.

Сначала опишем базовую ситуацию. Каждый из соперников может нанести слабый ракетный удар и максимально возможный ракетный удар либо ничего не делать. Если одна из сторон решает нанести удар, то другая — до того, как удар произойдёт — узнаёт об этом и может принять решение об ответном ударе. Если ответный удар происходит, то оба противника оказываются разбиты, несут огромные потери (при этом от получения мощного удара — ещё большие, чем от слабого), но сохраняются как государства. В этом случае игра заканчивается. После слабого удара пострадавший противник имеет возможность нанести слабый ответный удар, если он это делает, то происходит то же, что произошло бы если бы он нанёс ответный удар раньше. После мощного удара нанести ответ уже нельзя. После удара, на который не было ответа, пострадавший противник полностью разбивается и завоёвывается атаковавшим.

Изменения в ситуации:

1) Шум в системе предупреждения: создаёт с некоторой вероятностью ложные сообщения о слабом ударе (независимо у обоих противников).

2) ПРО: позволяет превратить мощный удар противника в слабый или остановить слабый удар

3) Маскировка: не позволяет сопернику обнаружить слабый удар, мощный удар при этом виден как слабый.

16. Представьте ‘‘ракетную угрозу’’ как игру в развёрнутой форме. Какие в ней равновесия Нэша, совершенные на подыграх? Что, если в системе имеется шум?

Есть ли значения параметров, при которых при наличии шума в системе иметь ПРО невыгодно? Иметь маскировку невыгодно?

Посмотрим теперь ещё раз на разные конкретные равновесия в конкретных играх, как их искать, и как на них влиять, меняя правила.

Определение 7. ‘‘Свадьбы’’. Имеются равные количества мужчин и женщин, собирающихся вступить в брак. Каждый из игроков как-то для себя упорядочивает по предпочтительности всех игроков противоположного пола. Набор свадеб, включающий всех игроков, называется устойчивым, если для любой не вступившей в брак пары один из игроков оценивает другого ниже, чем своего супруга.

17. Докажите, что устойчивый набор свадеб всегда существует.

Определение 8. ‘‘Два участка лесоповала’’. Есть n игроков, причём это количество велико. Есть два участка, где валят лес. На первом участке k участников повалят $k - \frac{k^2}{n}$ единиц леса, на втором $4k - \frac{2k^2}{n}$ единиц.

Заметим, что коалиционные подходы здесь применить трудно. Дело в том, что никакая коалиция ничего существенного обещать своим игрокам не может — если все остальные побегут к ним, то много леса повалить не удастся. Здесь игрок обязаны разбиться на две коалиции, и делёж выигрыша пока что не указан.

Для простоты можно предположить, что на каждом участке все игроки получают одинаковый выигрыш.

18. Найдите равновесия Нэша при лесоповале, если выигрыш игрока пропорционален количеству поваленного им леса.

19. Найдите равновесия Нэша при лесоповале, если выигрыш игрока равен одной n-й доле общего количества поваленного леса.

Заметим, что если у нас есть хозяин обоих участков, то он сам может вводить правила оплаты. При этом он может хотеть, чтобы работники сами распределились по участкам и валили максимальное количество леса. Если он воспользуется сдельной оплатой, то он получит равновесие Нэша. Все работники будут получать примерно поровну, но это не даст максимума производительности. Если же он объявит, что платит объединённой бригаде сдельную оплату, то результат будет лучше, хотя одинаковая оплата будет у людей, выполняющих сильно разный объём работ. При этом при переходе человек стал бы выполнять больше работы, но усилил бы переполненность участка настолько, что падение производительности остальных перекрыло бы рост его производительности.

Определение 9. Равновесие в игре, отличающейся от данной игры сложением и делением поровну всех выигрышей, называется иногда равновесием Мора.

Интересный факт про равновесие Нэша и равновесие Мора появляется, когда мы хотим научить играть сразу в класс похожих игр самообучающиеся автоматы. Если у автомата маленькая сложность (например, память) то оптимизация своего выигрыша даёт лучший результат, чем оптимизация общего выигрыша. При росте сложности индивидуальная оптимизация сходится к равновесию Нэша, а коллективная оптимизация сходится к равновесию Мора, дающему больший выигрыш, но медленнее. Это объясняется тем, что для успешной коллективной оптимизации надо помнить достаточно много, чтобы мочь усреднить (постоянно меняющуюся) разницу между двумя стратегиями по достаточному количеству попыток, чтобы случайные действия других игроков успели усредниться.

В прикладном смысле это показывает, что в маленьких командах из оценивающих всю ситуацию людей не имеет смысла устанавливать точно, кто сколько сделал — эффективнее будет заранее установить доли; но в больших плохо организованных коллективах это уже неэффективно.

Некоторые советские учёные говорили, что из-за этого социализм эффективнее капитализма в достаточно развитом обществе (но не в недостаточно развитом). Вопрос о том, удалось ли этого уровня развития производительных сил и систему управления достигнуть, рассматривать наука о самоорганизующихся системах не позволяла.

Коллективное поведение часто требует принятия согласованных решений. Иногда эффективным методом оказывается голосование. Но его нельзя провести идеально.

Определение 10. Пусть есть конечный набор возможных решений (исходов).

Системой предпочтений назовём упорядочение этих решений.

Голосованием назовём детерминированный процесс, который из набора систем предпочтений в обществе создаёт коллективную систему предпочтений. Оно не обязано давать один тот же результат при перестановках предпочтений между голосующими.

Голосование называется эффективным по Парето, если из того, что все голосующие ставят A выше B, следует, что в коллективной системе предпочтений A тоже будет выше B.

Голосование назовём устойчивым к мнимым вариантам, если результат сравнения A и B в результирующей системе предпочтений зависит только от их относительной предпочтительности в системах предпочтений голосующих.

20. Эффективное по Парето устойчивое к мнимым вариантам голосование учитывает только мнение одного голосующего (диктатора).

Некоторые леммы:

21. Докажите, что если при голосовании с тремя исходами все ставят один из исходов (X) либо на первое, либо на третье место, то этот исход не может получить в результате второе место.

22. Докажите, что при голосовании с тремя исходами есть игрок, который в какой-то ситуации выбирает, будет ли некоторый результат лучшим или худшим.

23. Докажите, что этот игрок может добиться любого упорядочивания оставшихся двух исходов.

24. Докажите, что этот же игрок может добиться любого упорядочивания вообще.