ПЛАН ЛЕКЦИЙ А.М.ВЕРШИКА В ДУБНЕ-2008

"А ЧТО БУДЕТ, ЕСЛИ n ОЧЕНЬ БОЛЬШОЕ?"

Тема 1. Асимптотическая теория подстановок и смежные вопросы.

1.Подстановки, перестановки, симметрическая группа S_n, сопряженность, разложение на циклы.

Предложение. Совокупность длин циклов - полный инвариант сопряженности.

Что такое вероятность:

$$P(g) \doteq \frac{1}{n!} \quad P(A) \doteq \frac{N(A)}{n!};$$

и "среднее" (математическое ожидание) функции f на группе:

$$Ef = 1 \cdot P\{f(g) = 1\} + 2 \cdot P\{f(g) = 2\} \dots k \cdot P\{f(g) = k\} = \sum_k k \cdot P\{f(g) = k\}$$

Две нумерации циклов - случайная и детерминированная. Кодирование подстановок.

Модель разложения на циклы в случайной нумерации: подстановка задается последовательностью чисел $i_1 = 1, i_2, \dots, i_n$, сгруппированных в циклы, причем каждый цикл начинается с наименьшего в нем числа, и концы циклов указаны.

Модель в детерминированной нумерации: циклы расположены в порядке убывания длин.

$$n_1(g) \geq n_2(g) \dots \geq n_k(g),$$

$$n = n_1(g) + n_2(g) + ..n_k(g), n_1 < n_2 < \dots n_k$$

Диаграмма Юнга, отвечающая подстановке. $\lambda = (n_1, n_1 + n_2 \dots n)$. Граф Юнга.

2.Первая задача. Найти среднее число длин циклов в типичной подстановке.

Точная формулировка:

Найти математическое ожидание (среднее) длин циклов случайной подстановки

1-е решение.

Используем случайную модель циклов.

A_k - множество подстановок, у которых в модели на k-м шаге (см. выше) оканчивается цикл.

Пример:

$$g = ((1,5), (2,3,8,6), (4,7)) : g \in A_2 \bigcap A_6 \bigcap A_8$$

Лемма 1)$P(A_k) = \frac{1}{n-k+1}$,

2)A_i и $A_j, i < j$ - независимы: $P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)$.

Теорема 1. *Математическое ожидание (среднее) длин циклов случайной подстановки*

$$E\{Cycl_n(g)\} = \ln n + O(1) \approx \ln n$$

Доказательство. Число циклов подстановки g равно числу их концов, т.е. числу множеств A_k, в которые попадает g, следовательно, математическое ожидание числа циклов равно математическому ожиданию суммы попаданий, т.е. равно сумме вероятностей множеств A_k:

$$E(\quad \mathrm{Cycl}_n(g)) = \sum_k P(A_k) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{n-k+1} \cdots + \cdots + 1 = \ln n + \gamma + o(1)$$

где $\gamma = 0,5772156649015235...$ - константа Эйлера. □

3.Непрерывная модель и второе решение.

Забудем теперь о комбинаторике и перейдем к непрерывным объектам - к анализу. Длина первого цикла k_1 в случайной модели может быть любым целым $1, 2 \ldots n$ с одинаковой вероятностью, второго - $1, 2, \ldots (n - k_1)$ и т.д.

Рассмотрим задачу о "ломании палки"("stick breaking process"или "марковская процедура деления отрезка").

Отрезок $[0, 1]$ делится ("ломается") случайно с равномерной вероятностью (т.е. точка разлома ξ и распределена на отрезке $[0, 1]$ равномерно). Левый отрезок фиксируем и затем ломаем правый отрезок. Выбираем последовательно точки разлома с помощью последовательности таких $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$- последовательность независимых равномерно распределенных на отрезке случайных величин. Получаем

$$x_1 = \ xi_1, \quad x_2 = \xi_2(1 - \xi_1), \quad \ldots \quad x_n = \xi_n(1 - \sum_k^{n-1} \xi_k) = \xi_n \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \xi_k)\,.$$

Фактически мы отображаем куб на симплекс и это - формулы отображения T_n куба

$$Q^n = \prod_1^n [0, 1]$$

на симплекс (почти биекции)

$$\Sigma^n = \{\{x_1, \ldots x_n\} : \sum_k x_k \leq 1, x_k \geq 0, \quad k = 1, \ldots, n\}.$$

Обратное отображение:

$$\xi_1 = x_1, \quad \xi_2 = \frac{x_2}{1 - x_1}, \ldots \quad , \xi_n = \frac{x_n}{1 - x_1 - ... - x_{n-1}}$$

Формулы применимы и к бесконечным последовательностям, т.е. задают отображение бесконечномерного куба на бесконечномерный симплекс.

$$T_\infty : Q^\infty \to \Sigma^\infty.$$

Это отображение преобразует меру на кубе λ в меру на симплексе κ.

О Σ^∞ - симплексе сходящихся рядов с суммой единица.

Идея носителя меры: свойство, выполняющееся с вероятностью единица и свойство "почти всякой точки".

$$\lim_n x_n^{\frac{1}{n}} = e^{-1}$$

Доказательство.

$$\lim \frac{1}{n} \ln x_n = \lim \frac{1}{n} \sum_k \ln(1-\xi_k) = \int_0^1 \ln(1-x)dx = e^{-1}$$

Здесь в последнем равенстве использован усиленный закон больших чисел или эргодическая теорема. □

Отсюда вытекает

Теорема 2. *Почти всякий по мере κ ряд сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем e^{-1}.*

Точнее, $\ln x_n = -n + o(\sqrt{n}); n \to \infty$, *причем остаточные (вторые) слагаемые при разных n асимптотически независимы.*

Следствие. Нормированные длины циклов случайных подстановок убывают со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем e^{-1} в том же смысле, что и выше.

Следует лишь уточнить, каким образом аппроксимируется подстановка.

Описанный эффект объясняет многое в комбинаторике.

Теперь объяснение, почему о числе циклов есть $\ln n$ - тривиально: именно столько членов геометрической прогрессии со знаменателем e^{-1} больше, чем $\frac{1}{n}$.

Другой вопрос. При каком n частная сумма "типичного" ряда (т.е. 99% всех рядов) станет больше 99% суммы всего ряда?

Решение. Подсчет дает число 11 (при достаточно больших n)

Следствие (о циклах).

Задача. Каково соотношение двух сумм - суммирование по четным и нечетным длинам циклов? Поделим их на n, тогда их сумма таких нормированных длин равна 1, поэтому достаточно рассмотреть лишь одну сумму. Как она распределена?

Ответ - не равномерно, а совсем наоборот. Плотность равна

$$\frac{c}{\sqrt{x(1-x)}}$$

т.е. либо одна из них очень большая, а вторая маленькая, либо наоборот. Почему? Потому что длины циклов убывают со скоростью геометрической прогрессии.

4. Займемся детерминированным упорядочением циклов - по убыванию длин (это, так называемый, вариационный ряд), и поставим более сложный вопрос - об асимптотических свойствах последовательности длин циклов, в частности, каково асимптотическое распределение длины максимального цикла. Впервые его решил В.Л.Гончаров в 40-х гг. Мы сделаем это более экономно.

Пусть

$$\rho_n(a) \equiv \frac{|\{g \in S_n : \frac{1}{n} n_{\max}(g) \leq a\}}{n!}.$$

Доля подстановок, у которых все циклы имеют нормированную на n длину, меньшую, чем $a \in \{\frac{i}{n}, i = 1 \dots n.\}$, т.е. $\rho_n(a)$ - функция распределения нормированной максимальной длины цикла.

Выведем функциональное уравнение для асимптотического распределения т.е.

$$\lim_n \rho_n(a) \equiv \rho(a)$$

.

Напомним, что

$$x_n = \xi_n \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \xi_k).$$

Выразим все величины через $\{\xi_n\}$ - последовательность независимых, которая задавала ряд $\{x_n\}$ (см. выше).

$$\rho(a) = \text{Prob}\{x : max_n x_n < a\} = \text{Prob}\{\xi_1 < a \quad \& \quad \xi_i < a \cdot \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \xi_k), \quad i > 1\}.$$

В силу независимости величины ξ_1 и совокупности величин $\{\xi_i, i > 1\}$, *условные меры (при условии $x_1 = \xi_1 = a$)* на совокупности $\{x_n, n > 2\}$ - одинаковы при всех значениях , и поэтому распределение второго максимума $\max_{n>1} x_n$ после надлежащей нормировки (на $1 - x_1$) будет такое же? как и распределение общего максимума. Иначе говоря, варьируя условие по промежутку $[0, a]$ получаем уравнение для распределения максимума:

$$\rho(a) = \int_0^a \rho(\frac{a}{1-t}) dt.$$

Сделаем замену под интегралом $u = \frac{a}{1-t}$

$$\rho(a) = a \cdot \int_a^{\frac{a}{1-a}} \rho(u) u^{-2} du.$$

Дифференцируя по a, (которое обозначим теперь t) получаем после несложных выкладок замечательное функциональное уравнение для плотности $p(.)$ асимптотического распределения максимального цикла подстановки при n стремящемся к бесконечности:

$$p(t) = \frac{d}{dt}\left[\int_0^t \rho(\frac{a}{1-t}) da\right] = \frac{\rho(\frac{t}{1-t})}{t}$$

или

$$t \cdot p(t) = \int_0^{\frac{t}{1-t}} p(u) du$$

Поскольку $\int_0^1 p(t) dt = 1$. то его можно переписать так:

$$p(t) = 1/t \cdot \left(1 - \int_{\frac{t}{1-t}}^{\infty} p(u) du\right),$$

а из этого соотношения видно, что знание функции $p(.)$ на интервале $(1/n, 1/(n-1))$ однозначно определяет ее на интервале $(1/(n+1), 1/n)$, так как отображение

$$t \vdash \frac{t}{1-t}$$

переводит второй интервал в первый. Но на интервале $(1, \infty) \quad (n = 0)$ плотность равна нулю, поэтому на интервале $([1/2, 1], \quad (n = 1)$ она равна

$$p(t) = 1/t,$$

а на интервале $(1/3, 1/2)$ получаем логарифм:

$$p(t) = 1/t \cdot \left(1 - \ln \frac{1-t}{t}\right),$$

далее возникает, так называемый, дилогарифм (интеграл от логарифма) очень популярный сейчас у физиков и K-теоретиков, трилогарифм и т.д. Гладкость функции нарушается лишь в точках вида $1/n$, но она увеличивается на единицу вместе с возрастанием n: в точке 1 функция имеет разрыв, в точке 1/2 - она непрерывна, но разрывна ее первая производная, и т.д. Функция $p(.)$ с колоссальной (сверхэкспоненциальной) скоростью стремится к нулю, когда аргумент стремится к 0.

Я назвал эту функцию функцией Дикмана-Гончарова, почему еще и Дикмана, будет объяснено далее. Она содержит всю информацию об асимптотическом поведении длины максимального цикла.

(График, таблица значений)

Проблема. Каково среднее (математическое ожидание) нормированной длины максимального цикла? (Константа Голомба) Численное значение легко сосчитать сколь угодно точно $(0,53...)$.

Голомб рассматривал другие функции: $R(.)$ и $\rho(.)$ (это не то ρ, что было выше), связанные с функцией Гончарова-Дикмана соотношениями:

$$R(t) = t^{-1} \cdot p(t^{-1}), \qquad p(t) = t^{-1} \cdot R(t^{-1}),$$

и

$$\rho(t) = R(t+1) = (t+1)^{-1} \cdot p((t+1)^{-1}).$$

Функция R задана на интервале $[1, \infty)$, а функция ρ - на $[0, \infty)$; при $t \in [0, 1), R(t) \equiv 0$; при $t \in [1, 2) \quad R(t) = \text{const}, \quad R(1) = \rho(0) = 1$; эти функции монотонно убывают и сверхэкспоненциально быстро стремятся к нулю на бесконечности.

Функциональное уравнение для них перепишется так:

$$R'(t) = -\frac{R(t-1)}{t-1}, \qquad t\rho'(t) = -\rho(t-1).$$

Это - уравнения с запаздывающим аргументом. Оказывается, что функция $R(.)$ с точностью до множителя $e^{-\gamma}$, где γ - константа Эйлера (см. выше), - есть плотность распределения важной функции F:

$$F(\xi_1, \xi_2 \dots) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{k} \xi_i$$

здесь $\{\xi_n\}$ по-прежнему последовательность равномерно распределенных на отрезке независимых случайных величин. Соответственно, ρ - плотность распределения функции $F - 1$.

Но наиболее важная функция - это небольшое видоизменение функции Дикмана-Гончарова:

$$h(t) = e^{-\gamma} \frac{p(t)}{t}$$

Это - плотность распределения функции $F(\xi)^{-1}$. Еще важнее, что это плотность инвариантной меры марковского процесса, связанного с последовательностью максимальных циклов. Более серьезные связи и задачи (марковские процессы, блуждания, интегрирование по пространству сходящихся рядов) оставим до другого раза. Скажем лишь, что прообраз монотонной последовательности $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_k \dots$ при отображении куба на симплекс состоит из тех последовательностей $y_1, y_2 \dots$, любые два соседних члена $(y_k, y_{k+1}, k \geq 1$ лежат в области

$$y_{k+1} \geq \min(\frac{y_k}{1-y_k}, 1)$$

, и что последовательность $\{y_k\}$ образует марковскую цепь с переходными вероятностями, легко выражающимися через функцию p. Но при этом, удивительно, что не p, а функция h является инвариантной плотностью для этой марковской цепи. Поэтому, стационарная марковская цепь (с инвариантной начальной мерой) получается почему-то менее естественной, чем можно было бы ожидать. Точнее, появление функции

$$h(t) = \exp(-\gamma)\frac{p(t)}{t}$$

в качестве инвариантной плотности означает, что *в исходной постановке задачи естественно было бы слегка изменить определение вероятности*: вместо равномерной меры на подстановках надо считать, что вероятность подстановки $\mathrm{Prob}(g)$ обратно пропорциональна длине наибольшего цикла подстановки g!

5.Простые делители типичных натуральных чисел. Пусть

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots p_k$$

- разложение натурального числа n на простые делители, упорядоченные по убыванию:

$$p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_k.$$

Рассмотрим вектор

$$\frac{\ln p_1}{\ln n}, \frac{\ln p_2}{\ln n}, \dots \frac{\ln p_k}{\ln n}$$

Пусть n пробегает первые N натуральных чисел. Каково поведение равномерного распределения на множестве векторов, отвечающих первым числам, когда N стремится к бесконечности, в частности, каково распределение первой компоненты (максимального простого делителя)? Теория чисел, особенно аналитическая, изучает простые числа и те, которые имеют мало простых делителей. Здесь же мы будем интересоваться основной массой натуральных чисел. Заметим, что эта задача совсем не похожа на предыдущую: в первой мы рассматривали разбиение натуральных чисел и для данного натурального числа существует $p(n)$ разбиений, в то время как разложение на простые единственно; кроме того, слагаемые во второй задаче - трансцендентные числа, а не целые, как в первой задаче.

Рассмотрим первые N чисел и поставим вопрос о том, каково распределение $\frac{\ln p_1}{\ln n}$, т.е. попросту говоря, какова доля натуральных чисел среди первых N чисел, у которых нормированный максимальный простой делитель составляет заданную часть самого числа. Такой же вопрос модно ставить нет только о максимальном простом делителе, но и о произвольных k делителях. В формулах наш вопрос таков:

найти
$$\Phi(a) = \lim_{N\to\infty} N^{-1}\#\{n : n < N : \frac{\ln p_1(n)}{\ln n} < a \le 1\},$$
или для нескольких делителей:
$$\Phi(a_1, a_2 \dots a_k) = \lim_{N\to\infty} N^{-1}\#\{n : n < N : \frac{\ln p_i(n)}{\ln n} < a_i, i = 1, 2 \dots k\}$$

Тем не менее, ответ в обеих задачах совпадает, и предельное распределение максимума - т.е. числа $\frac{\ln p_1}{\ln n}$, где наибольший простой делитель числа n, асимптотически такое же, как распределение нормированной длины максимального цикла случайной подстановки. Само это распределение нашел в 30-х гг. XX века немецкий математик Дикман, но совпадение с функцией Гончарова и независимое доказательство одинаковости было найдено лишь недавно.

Выводы аналогичны: например, начиная с некоторого большого числа N 99 процентов натуральных чисел n, меньших, чем N обладают свойством
$$n^{0,99} < p_1 \cdot p_2 \dots p_{11},$$
или иначе говоря, у основной части (99%) натуральных чисел основная часть (99%) числа есть произведение наибольших 11 простых делителей.

Тема 2. Целочисленные многоугольники и предельные формы.

Будем рассматривать целочисленную решетку $\mathbb{Z}^2$ на плоскости и ломаные и многоугольники с вершинами на ней. Зафиксируем две точки $T_0 = (0, 0)$ и $T_n = (n, n)$ Обозначим $C(T_0, T_n; \mathbb{Z}) \equiv C_n$ все выпуклые целочисленные ломаные, с концами в точках T_0, T_n. Для того, чтобы сравнивать их свойства при разных n, перейдем к решетке с шагом n^{-1}, и, тем самым к выпуклым ломаным, соединяющим точки (0,0) и (1,1) с вершинами на решетке $\mathbb{Z}^2_{n^{-1}}$. Теперь мы можем спрашивать, "а что будет при больших n: например, как выглядит типичная ломаная? сколько у нее сторон?" и пр.

Эта задача появилась в 80-х гг в связи с несколькими работами - В.И.Арнольда о выпуклых целочисленных многогранниках, и в связи с общей теорией предельных форм ("limit shape"), развиваемой автором и его ученикам.

Первое очевидное, но ключевое наблюдение, выделяющее размерность 2, состоит в том, что выпуклая ломаная однозначно определяется набором своих звеньев (сторон), как двумерных векторов (у нас векторы целочисленные). При этом этот набор может быть совершенно произвольным с одной лишь оговоркой, что в нем нет коллинеарных векторов. Это сразу переводит задачу в область, называемую "теория векторных разбиений".

Векторное разбиение - это представление целочисленного вектора с неотрицательными координатами в виде неупорядоченной суммы таких же векторов. В размерности 1 это обычные разбиения (см. тему 1). Для векторных разбиений есть похожая, но куда менее полная теория, и, в частности, пользуясь теми же средствами (Эйлер, Харди-Рамануджан, Радемахер, Райт) можно получить асимптотику числа таких разбиений и в частности числа интересующих нас ломаных.

Сначала напишем производящую функцию для этого числа. Число $p_2(n)$ наборов целочисленных неколлинеарных векторов с суммой $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ имеет следующую производящую функцию (двух переменных)

$$F_2(x, y) = \prod_{p,q} \frac{1}{1 - x^p y^q} = \sum_{n,m} p_2(n, m) x^n y^m,$$

суммирование ведется по всем неотрицательным парам (n, m), а произведение - по всем парам взаимно-простых (p, q), - это есть требование неколлинеарности векторов. Производящая эйлеровская функция одной переменной для разбиений натуральных чисел или для диаграмм Юнга - такова

$$F_1(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^k} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) x^n,$$

легко написать формулу для многомерных разбиений.

Эйлеровская логарифмическая асимптотика такова

$$\ln p(n) = 2\frac{\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{n}(1 + o(1)),$$

(ее можно получать элементарными средствами, анализируя производящую функцию).

Нас интересует диагональная асимптотика - $p_2(n, n)$; она такова:

$$\ln p_2(n, n) = 3\zeta(3)^{1/3} \cdot n^{2/3}(1 + o(1)).$$

(ее тоже можно попробовать доказать элементарно)

Эта оценка же дает асимптотику числа выпуклых решетчатых ломаных на сетке с шагом $1/n$ в квадрате $|x| + |y| = 1$ с концами в его противоположных вершинах. Это есть следствие указанного выше соответствия между векторными разбиениями и такими ломаными. Такой же ответ получается, если вместо квадрата взять параллелограмм с той же площадью, действительно, все наши построения инвариантны относительно группы линейных преобразований, сохраняющих площадь. Та же оценка может быть использована для оценки числа замкнутые целочисленных ломаных, т.е. целочисленных многоугольников. Это делается ниже.

Пусть теперь дана выпуклая кривая с концами в точках (0,0) и (1,1), т.е. график выпуклой функции $y = f(x), f(0) = 0, f(1) = 1$. Сколько выпуклых ломаных с вершинами на решетке с шагом $1/n$ можно вписать в ϵ-окрестность этой кривой?

Будем искать ответ так, как это делали классики анализа: сначала решим локальную задачу - для бесконечно-малого параллелограмма, построенного по двум бесконечно-близким касательным к кривой, а потом проинтегрируем по ним. Построим следующий параллелограмм на векторах, один и которых имеет начало в точке $(x, f(x))$ и направление $f'(x)$, а второй - начало в точке $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ и направление $f'(x + \Delta x)$.

Лемма. Площадь этого параллелограмма равна $f''(x)(\Delta x)^3$ (это правильная размерность, так как размерность второй производной есть обратная длина: см$^{-1}$).

Следствие. Обозначим число выпуклых ломаных $V_{\epsilon,n}(f)$

$$\lim_{\epsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} n^{-2/3} \ln V_{\epsilon,n}(f) = \int_0^1 [f''(x)]^{1/3} dx = \int_\gamma \kappa(s)^{1/3} ds,$$

где γ- наша кривая, κ - кривизна кривой, а ds элемент длины кривой.

Далее начинается геометрия, точнее аффинная геометрия.

Интеграл в формуле называется аффинной длиной кривой γ.

Задача . Дать, геометрическое описание аффинной длины, например, как предела функционалов от обычных (эвклидовых) длины и кривизны кривой. Вывести отсюда, что аффинная длина отрезка равна нулю.(См.книгу Бляшке)

Теорема. Кривая, в окрестности которой сосредоточено наибольшее число выпуклых решеточных ломаных (на самом деле - почти все), есть геодезическая аффинной геометрии, а именно критическая точка функционала длины. В данном случае это парабола.

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{y} = 1.$$

Эта кривая есть предельная форма выпуклой решеточной ломаной, так как в ее окрестности лежат почти все решетчатые выпуклые ломаные с данными концами.

Задача. Найти кривую, с концами $(0,0), (1,1)$ с единичной суммой кубических корней из площадей двух параллелограммов, у которых одна (общая) вершина есть произвольная точка кривой, противоположная вершина есть $(0,0)$ у одного, $(1,1)$ - у другого параллелограмма, а стороны - отрезки касательной и координатные оси.

Можно рассмотреть задачу о замкнутых выпуклых ломаных, т.е. о выпуклых многоугольниках. Что будет для них предельной формой?

Для множества выпуклых решетчатых многоугольников, лежащих в квадрате $\max\{|x|, |y|\} \leq 1$, предельная форма есть выпуклая фигура, составленная из четырех кусков вышеописанной кривой в каждом квадранте:

$$\sqrt{1-|x|}+\sqrt{1-|y|}=1.$$

Обобщая этот результат, Барань получил похожий ответ для выпуклых решетчатых многоугольников, лежащих в произвольном выпуклом многоугольнике. Ответ дается выпуклой фигурой, состоящей из описанных кривых и отрезков (быть может вырождающихся в точку), лежащих на сторонах многоугольника.

Если же освободиться от граничных условий и фиксировать, например, площадь многоугольника и барицентр (например, считать, что он совпадает с началом координат), то ответ совсем другой:

Задача. В этом случае предельная форма не единственна, множество предельных форм есть множество всех эллипсов данной площади с центром в нуле.

Заметим, что в аффинной геометрии все кривые второго порядка есть геодезические.

Многомерный аналог: проблема существования предельной формы целочисленных выпуклых многогранников — открыта.

Тема 3. Равномерная мера на разбиениях и метод большого ансамбля

Рассмотрим теперь разбиения с равномерной мерой

$$Prob(\lambda)=\frac{1}{p(n)}$$

Здесь $p(n)$— число разбиений числа n; его начал изучать Эйлер, доказавший формулу для производящей функции.

$$F_1(x)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^k}=\sum_{n=0}^{\infty}p(n)x^n.$$

Асимптотику $p(n)$ нашли Харди и Рамануджан, а точную асимптотическое разложение дал Радемахер. Главный логарифмический член

$$\ln p(n)=\frac{C}{\sqrt{n}}\exp\{2\zeta(2)\sqrt(n)\}(1+o(1))$$

В этих работах используется сложный комплексный анализ, но оценку сверху: $\ln p(n)\leq A\sqrt{n}$ можно получить элементарным методом, исходя из грубого неравенства: $\ln p(n)<\ln F_1(x)-n\ln x$, и, минимизирую по $x\in[0,1]$ правую часть, разложенную в степенной ряд.

Метод большого канонического ансамбля; меры μ_x и μ^n эквивалентность ансамблей. Мультипликативные статистики.

Кривая, являющаяся предельной формой — "limit shape— в задаче с равномерной мерой на разбиениях такова:

$$\exp\{-\frac{\pi}{\sqrt{6}}x\} + \exp\{-\frac{\pi}{\sqrt{6}}y\} = 1.$$

Первым ее открыл Темперли в 1950 г. не давая обоснований. Затем она была переоткрыта мной.

Ответы для других мультипликативных статистик. Связь со статистической физикой идеального газа.

Лекция 3 (Семинар).

1.О векторных разбиениях, аффинной геометрии и целочисленных многоугольниках. (Число вершин, распределение углов выпуклая, емкость и пр.)

2.Общая теория разбиений. (Задача о построении равномерной меры.)

3.Алгебры и диаграммы Браттели. Связь с симметрической группой.

4.Граф Юнга, Паскаля. Автоморфизмы Паскаля и Юнга.

5.Центральные меры и стабильная положительность.