ПРОЕКТИВНЫЕ ПЛОСКОСТИ

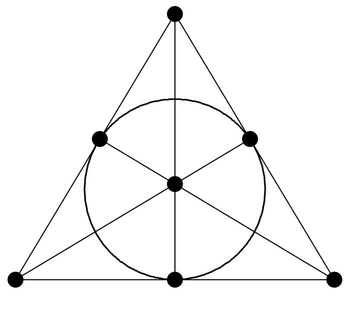
ДМИТРИЙ ОРЛОВ

И, если подлинно поется
И полной грудью, наконец,
Все исчезает — остается
Пространство, звезды и певец!
О. Мандельштам, 1913

Но надо жить без самозванства,
Так жить, чтобы в конце концов
Привлечь к себе любовь пространства,
Услышать будущего зов.
Б. Пастернак, 1956

Понятие проективного пространства — одно из базисных понятий алгебраической геометрии (и не только алгебраической). Основными объектами алгебраической геометрии являются алгебраические многообразия, которые обычно предполагаются вложенными в проективное пространство. Проективная плоскость — это проективное пространство размерности 2. Существует несколько определений проективной плоскости. Одно из них — это компактификация обычной плоскости (в некотором смысле минимальная) с добавлением прямой на бесконечности.

Проективные плоскости можно рассматривать не только над вещественными числами, но и над другими полями: например, над полем комплексных чисел или над конечными полями. Самой маленькой является проективная плоскость над полем из двух элементов $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$, которая называется плоскостью Фано и состоит из 7 точек и 7 прямых.



Проективная плоскость имеет несколько несомненных преимуществ в сравнении с обычной плоскостью. Одно из них — это то, что теперь любые две прямые пересекаются, и в точности в одной точке. Это приводит к определению абстрактной проективной плоскости как множеству точек и множеству прямых с отношением инцидентности (принадлежности) между ними так, что выполнены следующие три свойства:

1) *Через две различные точки плоскости проходит прямая, причем только одна.*

2) *Любые две прямые имеют ровно одну общую точку.*

3) *Существует 4 точки, любые три из которых не лежат на одной прямой.*

Дополнительной аксиомой, которую мы можем потребовать, является аксиома Дезарга:

если треугольники ABC и $A'B'C'$ таковы, что прямые AA', BB', CC' пересекаются в точке O, то точки пересечения пар соответствующих прямых AB и $A'B'$, BC и $B'C'$, AC и $A'C'$ лежат на одной прямой.

Для любой проективной плоскости над телом (некоммутативным полем) выполняется аксиома Дезарга и, обратно, теорема Гильберта утверждает, что если в плоскости выполняется аксиома Дезарга, то она является проективной плоскостью над некоторым телом. Если выполняется аксиома Паппа, то выполняется и аксиома Дезарга, и в этом случае проективная плоскость является проективной плоскостью над полем (т.е. тело является коммутативным).

С другой стороны, существует множество не-Дезарговых плоскостей. Эта обширная область мало исследована даже в случае плоскостей с конечным числом точек. Если проективная плоскость имеет конечное число точек, то можно показать, что их количество равно в точности $n^2 + n + 1$ для некоторого целого n, которое называется порядком. Существует гипотеза, утверждающая, что в этом случае порядок n является степенью простого числа.

С одной стороны, проективная плоскость — интереснейший алгебро-геометрический объект с богатой внутренней жизнью, с другой стороны из нее вырастают другие области алгебраической геометрии. Проективная плоскость является простейшим однородным пространством, простейшим торическим многообразием, простейшей поверхностью дель-Пеццо и простейшим многообразием Фано. Группа бирациональных преобразований проективной плоскости, которая называется группой Кремоны, одна из самых известных в алгебраической геометрии и до сих пор до конца не описана.

У проективной плоскости существует несколько обобщений, такие как взвешенные проективные плоскости и некоммутативные проективные плоскости.

Обо всем об этом мы вряд ли сможем поговорить, но мы попробуем взглянуть на проективные плоскости с разных точек зрения.

Предварительных знаний не требуется, но знакомство с понятиями группы и поля желательны.