ОБЪЕМЛЕМАЯ ОДНОРОДНОСТЬ

А. Скопенков, skopenko@mccme.ru

Аннотация.

Приводится очень короткое доказательство следующей теоремы Д. Реповша, Е. В. Щепина и автора. Предположим, что для любых двух точек x, y локально компактного подмножества N гладкого многообразия M существует диффеоморфизм $h : M \to M$, для которого $h(N) = N$ и $h(x) = y$. Тогда N — гладкое подмногообразие в N.

Введение.

Какой формы могут быть ножны, чтобы из них можно было вытащить саблю? Математическая формулировка этого вопроса приводит к следующему понятию. Подмножество N пространства называется *изометрически объемлемо однородным*, если для любых двух точек $x, y \in N$ существует движение (т.е. изометрия) пространства, переводящее x в y? Хорошо известно, что изометрически объемлемо однородными кривыми в трехмерном пространстве являются только прямые, окружности и винтовые линии.

А какой формы может быть электрический кабель, чтобы провод можно было вытащить из него (провод можно гнуть, но нельзя ломать)? Математическая формулировка этого вопроса приводит к следующему понятию. Подмножество N дифференцируемого многообразия M называется *дифференцируемо объемлемо однородным*, если *для любых двух точек $x, y \in N$ существует диффеоморфизм многообразия M, переводящий x в y.* Непрерывность производной диффеоморфизма h не предполагается; определение диффеоморфизма для $M = \mathbf{R}^2$ напомнено ниже. (Читатель, не знакомый с понятием дифференцируемого многообразия, может считать, что M является плоскостью или пространством $\mathbf{R}^m$: даже для этих частных случаев приведенный ниже результат интересен и нетривиален, а переход к общему случаю стандартен. В летней школе 'Современная Математика' будет рассматриваться только этот частный случай.)

Теорема. *Пусть N — замкнутое подмножество дифференцируемого многообразия M. Если N дифференцируемо объемлемо однородно, то N является дифференцируемым подмногообразием в M.*

Определение дифференцируемого подмногообразия напомнено ниже.

Эта теорема (Д. Реповша, Е. В. Щепина и автора) имеет несколько интересных следствий (приведенных ниже): как элементарных, так и касающихся Пятой проблемы Гильберта.

Приводимое доказательство [Sk07] проще предложенного в [RSS93, RSS96, RS00] (хотя использует те же идеи).

Обсуждение основной теоремы.

Напомним следующие определения. Отображение $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ называется *дифференцируемым*, если для любой точки $z_0 \in \mathbf{R}^2$ существуют такие линейное отображение $A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ и бесконечно малая функция $\alpha : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, что для любой $z \in K$ выполнено

$$F(z) = F(z_0) + A(z - z_0) + \alpha(z - z_0)|z, z_0|.$$

Это линейное отображение A называется *производной* отображения F в точке z_0. Если $F = (F_1, F_2)$, то матрица производной в стандартном базисе есть $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$. *Диффеоморфизмом* плоскости $\mathbf{R}^2$ называется взаимно-однозначное дифференцируемое отображение $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, производная которого в каждой точке невырождена (т.е. $\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial F_2}{\partial y} \neq \frac{\partial F_2}{\partial x}\frac{\partial F_1}{\partial y}$).

Напомним, что подмножество $N \subset M$ дифференцируемого многообразия M называется *дифференцируемым подмногообразием*, если для любой точки $x \in N$ найдутся ее окрестность, диффеоморфная $\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{m-k}$ (отождествим ее с $\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{m-k}$) и дифференцируемое инъективное отображение $q : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^{m-k}$, график которого есть $N \cap \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{m-k}$. (Это определение, удобное для доказательства основной теоремы, равносильно стандартному [Pr04].)

Например, дифференцируемо объемлемо однородным является любое дифференцируемое подмногообразие дифференцируемого многообразия (в частности, *график любой дифференцируемой функции* $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$). Основная теорема показывает, что верно и обратное.

Элементарные (но нетривиальные) следствия. (1) *Если график непрерывной функции* $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *дифференцируемо объемлемо однороден, то эта функция дифференцируема. (Функция, имеющая бесконечную производную в некоторой точке, считается дифференцируемой в этой точке.)*

(2) *Канторово множество* [Pr04, 4.4] *не может быть дифференцируемо объемлемо однородно вложено в плоскость.*

Условие замкнутости в основной теореме можно ослабить до локальной компактности (ибо в том месте доказательства, где используется замкнутость, достаточно локальной компактности). Теорема неверна без предположения замкнутости (или локальной компактности); контрпример: $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

Напомним, что отображение $q : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^m$ называется *липшициевым*, если существует такое s, что $|q(x) - q(y)| < s|x - y|$ для любых двух различных точек $x, y \in \mathbf{R}^k$. Заметим, что канторово множество *может* быть *непрерывно* или *липшициево* объемлемо однородно вложено в плоскость и в $\mathbf{R}^m$ — докажите или см. [MR99]. Значит, аналоги приведенной теоремы для непрерывной или липшициевой категорий неверны.

Аналог приведенной теоремы (и следствия (1)) для C^1-категории верен. Доказательство аналогично. [1]

Гипотеза. *Аналог приведенной теоремы верен для C^r-категории при $r \geq 2$ и для аналитической категории.* [2]

Если в каком-то из следующих применений встретятся непонятные читателю термины, то это применение можно опустить без ущерба для понимания дальнейшего.

Другие применения. (3) Известно, что многообразия однородны и что однородное пространство не обязано быть многообразием (пример: канторово множество [Pr04, 4.4]). Приведенная теорема показывает, что свойство быть *дифференцируемым* подмногообразием равносильно *дифференцируемой объемлемой* однородности. Ср. [Gl68].

(4) При помощи приведенной теоремы удобно доказывать, что некоторые группы являются группами Ли. Например, из нее вытекает теорема Картана о том, что *любая замкнутая подгруппа группы Ли является подгруппой Ли.*

(5) Любая орбита некоторого непрерывного действия топологической группы на гладком многообразии диффеоморфизмами является гладко объемлемо однородной. Поэтому из приведенной теоремы вытекает, что *группа p-адических чисел не может свободно (и*

[1] В конце первого случая надо дополнительно заметить, что у производной дифференцируемого отображения есть точка непрерывности (поскольку производная есть поточечный предел последовательности непрерывных функций: для $m = 1$ имеем $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty}(f(x + \frac{1}{n}) - f(x))n$. Тогда из объемлемой C^1-однородности будет вытекать, что N есть C^1-подмногообразие.

[2] Вопреки [RSS96, RSS97], автор не имеет доказательства гипотезы в C^r-категории при $r \geq 2$. Для этого доказательства можно вместо конусов $B_l^{m,k}$ пытаться рассматривать объекты, более гладко втыкающиеся в начало координат, а вместо $(m - k)$-мерных шаров $D \subset L$ (из второго случая) — фигуры, имеющие больший порядок касания с $p(N')$. См. также [Wi].

даже эффективно) действовать на гладком многообразии диффеоморфизмами. Известно, что последнее утверждение влечет следующий результат: *если локально компактная топологическая группа эффективно действует на гладком многообразии диффеоморфизмами, то это группа Ли.* Это гладкий случай гипотезы Гильберта-Смита, доказанный в 1946 Бохнером и Монтгомери [MZ55, Theorem 2 on p. 208] более сложным образом. Гипотеза Гильберта-Смита появилась после решения в 1952 (независимо Глизоном, а также Монтгомери и Циппиным) следующей пятой проблемы Гильберта: *любая локально евклидова топологическая группа является группой Ли* [MZ55]. Приведенная теорема позволяет редуцировать гладкий случай гипотезы Гильберта-Смита и к пятой проблеме Гильберта. См. также [RS97, RSS97].

(6) Приведенная теорема позволяет свести следующий результат [MZ55, Theorem 3 on p. 208-209] к его простому случаю $m = 1$ (т.е. к уравнению Коши $h(s+t) = h(s) + h(t)$): *любая однопараметрическая группа $\{h^t\}_{t\in\mathbf{R}}$ диффеоморфизмов m-мерного многообразия, непрерывно зависящих от параметра t, на самом деле гладко зависит от этого параметра.* (Этот результат был сформулирован в качестве проблемы В. И. Арнольдом в 1980-е годы.)

Доказательство основной теоремы.

Мы советуем читателю разобрать это доказательство сначала для $M = \mathbf{R}^2$, чего достаточно для элементарных следствий (тогда конец этого абзаца можно пропустить). То, что N является дифференцируемым подмногообразием в M, является локальным условием. Поэтому можно считать, что $M = \mathbf{R}^m$.

Обозначим $|x| := \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_m^2}$ и

$$B_l^{m,k} := \{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{R}^m \mid -l^2 x_k < |x| < 1/l \quad \text{и} \quad l^2|x_i| < |x| \text{ для } k < i \le m\}.$$

Тогда

• $B_l^{m,m+1}$ есть проколотая внутренность m-мерного шара радиуса $1/l$,

• $B_l^{m,k}$ есть открытый конус над $(1/l^2)$-окрестностью k-мерного полушария в $(m-1)$-мерной сфере радиуса $1/l$ для $1 \le k \le m$, и

• $B_l^{m,0} = \emptyset$ для $l > m$.

Обозначим через O_m группу ортогональных преобразований пространства $\mathbf{R}^m$.

Возьмем наибольшее $k \ge 0$, для которого

$$(*) \quad \text{при любом } x \in N \text{ существуют такие } l > m \text{ и } A \in O_m, \text{ что } (x + AB_l^{m,k}) \cap N = \emptyset.$$

(Неформально это значит, что N является '$(m-k)$-мерно липшициевым'.) Такое k существует, поскольку (*) справедливо при $k = 0$. См. рис. 1, где $m = 2$ и $k = 1$.

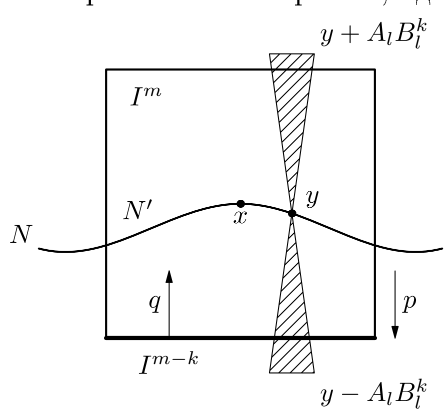

Рисунок 1

Если $k = m + 1$, то N состоит из изолированных точек и теорема доказана. Поэтому будем считать, что $k \le m$.

Далее фиксируем m и k и опускаем их из обозначений конуса $B_l^{m,k}$. Возьмем произвольную последовательности $\{A_l\}$, всюду плотную в O_m. Обозначим

$$N_l := \{x \in N \mid (x + A_l B_l) \cap N = \emptyset\}.$$

Ввиду условия (*) имеем $N = \cup_{l=1}^{\infty} N_l$. Нетрудно проверить, что N_l *замкнуто в* N (докажите или см. детали в [RSS96, Лемма 3.1]). Значит, по теореме Бэра о категории некоторое N_l содержит непустое открытое в N множество.

Поэтому существуют точка $x \in N$ и замкнутый m-мерный куб I^m диаметра меньше $1/l$ с центром в x, для которых $N' := N \cap I^m \subset N_l$. Тогда

$$(**) \quad [(y + A_l B_l) \cup (y - A_l B_l)] \cap N' = \emptyset \quad \text{при любом} \quad y \in N'.$$

Действительно, если $z \in (y - A_l B_l) \cap N'$, то $y \in (z + A_l B_l) \cap N' \subset N_l$, что невозможно.

Так как N замкнуто, то можно считать, что N' компактно. Можно также считать, что некоторая $(m-k)$-мерная грань L куба I^m перпендикулярна k-мерной плоскости $A_l(\mathbf{R}^k \times \vec{0})$ ($L = I^m$ при $k = 0$). Обозначим через $p : I^m \to L$ ортогональную проекцию.

Первый случай: $p(N')$ содержит открытое в L множество U. (Это заведомо так для $k = m$, когда все уже очевидно.) (Это заведомо не так для $k = 0$.) Из (**) следует, что p является взаимно-однозначным на N', и что обратное отображение $q : U \to N'$ липшициево. Поэтому q имеет точку дифференцируемости [Fe69, Теорема 3.1.6]. Тогда из дифференцируемой объемлемой однородности вытекает, что q дифференцируемо в любой точке. Поэтому условие из определения дифференцируемого подмногообразия выполнено в одной точке множества N. Тогда из дифференцируемой объемлемой однородности вытекает, что N является дифференцируемым подмногообразием.

Второй случай: $p(N')$ не содержит никакого открытого в L множества. (Значит, $k < m$.) Так как $p(N')$ не содержит открытого в L множества, то существует точка $a \in L - p(N')$, достаточно близкая к центру грани L (точнее, расстояние от которой до центра грани L меньше четверти диаметра этой грани). Так как $p(N')$ компактно, то расстояние от a до $p(N')$ не равно нулю и существует точка $z \in N'$, для которой $|a - p(z)|$ равно этому расстоянию. Поскольку a достаточно близко к центру грани L, то $p(z)$ лежит *внутри* грани L. Тогда открытый $(m-k)$-мерный шар $D \subset L$ с центром в y и радиусом $|a - p(z)|$ не пересекает $p(N')$. Поэтому $p^{-1}(D) \cap N' = \emptyset$. Ясно, что

$$(z + A_l B_l) \cup (z - A_l B_l) \cup p^{-1}(D) \supset z + A_l B_s^{m,k+1} \quad \text{для некоторого } s.$$

Отсюда и из (**) следует, что $(z + A_s B_s^{m,k+1}) \cap N = \emptyset$. Так как N дифференцируемо объемлемо однородно, то при любом $x \in N$ существуют окрестности Uz и Ux точек z и x в $\mathbf{R}^m$ и диффеоморфизм $h : Uz \to Ux$, переводящий z в x и $Uz \cap N$ в $Ux \cap N$. Тогда по определению диффеоморфизма

$$h(Uz \cap (z + A_s B_s^{m,k+1})) \supset x + A B_u^{m,k+1} \quad \text{для некоторых} \quad A \in O_m \text{ и } u > m.$$

Значит, (*) выполнено с заменой k на $k+1$. Это противоречит максимальности числа k. QED

Литература.

[DRS89] D. Dimovski, D. Repovš and E. V.Ščepin, C^∞-homogeneous closed curves on orientable closed surfaces, Geometry and Topology, ed. G. M. Rassles and G. M. Stratopoulos, 1989 World Scientific Publ. Co Singapore, pp. 100-104.

[DR95] D. Dimovski and D. Repovš, On homogeneity of compacta in manifolds, Atti. Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, XLIII (1995) 25–31.

[Fe69] H. Federer, Geometric Measure Theory, Springer, Berlin, 1969.

[Gl68] H. Gluck, Geometric characterisation of differentiable manifolds in Euclidean space, II, Michigan Math. J. **15:1** (1968), 33–50.

[MR99] J.Malešič and D. Repovš, On characterization of Lipschitz manifolds, New Developments In Differential Geometry, J. Szenthe, Ed., Kluwer, Dordrecht 1999, pp. 265-277.

[MZ55] D. Montgomery and L. Zippin, Topological Transformation Groups, Princeton, Princeton Univ. Press, 1955.

[Pr04] В. В. Прасолов, Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии, Москва, МЦНМО, 2004.

[RS97] D. Repovš and E. V. Shchepin, A proof of the Hilbert-Smith conjecture for actions by Lipschitz maps, Math. Ann. **308** 1997, 361–364.

[RS00] E. V. Shchepin and D. Repovš, On smoothness of compacta. Jour. of Math. Sci., **100(6)** 2000, 2716–2726.

[RSS93] D. Repovš, A. B. Skopenkov and E. V. Ščepin, A characterization of C^1-homogeneous subsets of the plane, Boll. Unione Mat. Ital., **7-A** (1993), 437–444.

[RSS96] D. Repovš, A. B. Skopenkov and E. V.Ščepin, C^1-homogeneous compacta in $\mathbf{R}^n$ are C^1-submanifolds of $\mathbf{R}^n$, Proc. Amer. Math. Soc. **124:4** (1996), 1219–1226.

[RSS97] D. Repovš, A. B. Skopenkov and E. V. Ščepin, Group actions on manifolds and smooth ambient homogeneity, Jour. of Math. Sci. (New York), **83:4** (1997), 546–549.

[Sk07] A. Skopenkov, A characterization of submanifolds by a homogeneity condition, Topol. Appl. 154 (2007) 1894-1897. http://arxiv.org/abs/math.GT/0606470.

[Wi] A. Wilkinson, in preparation