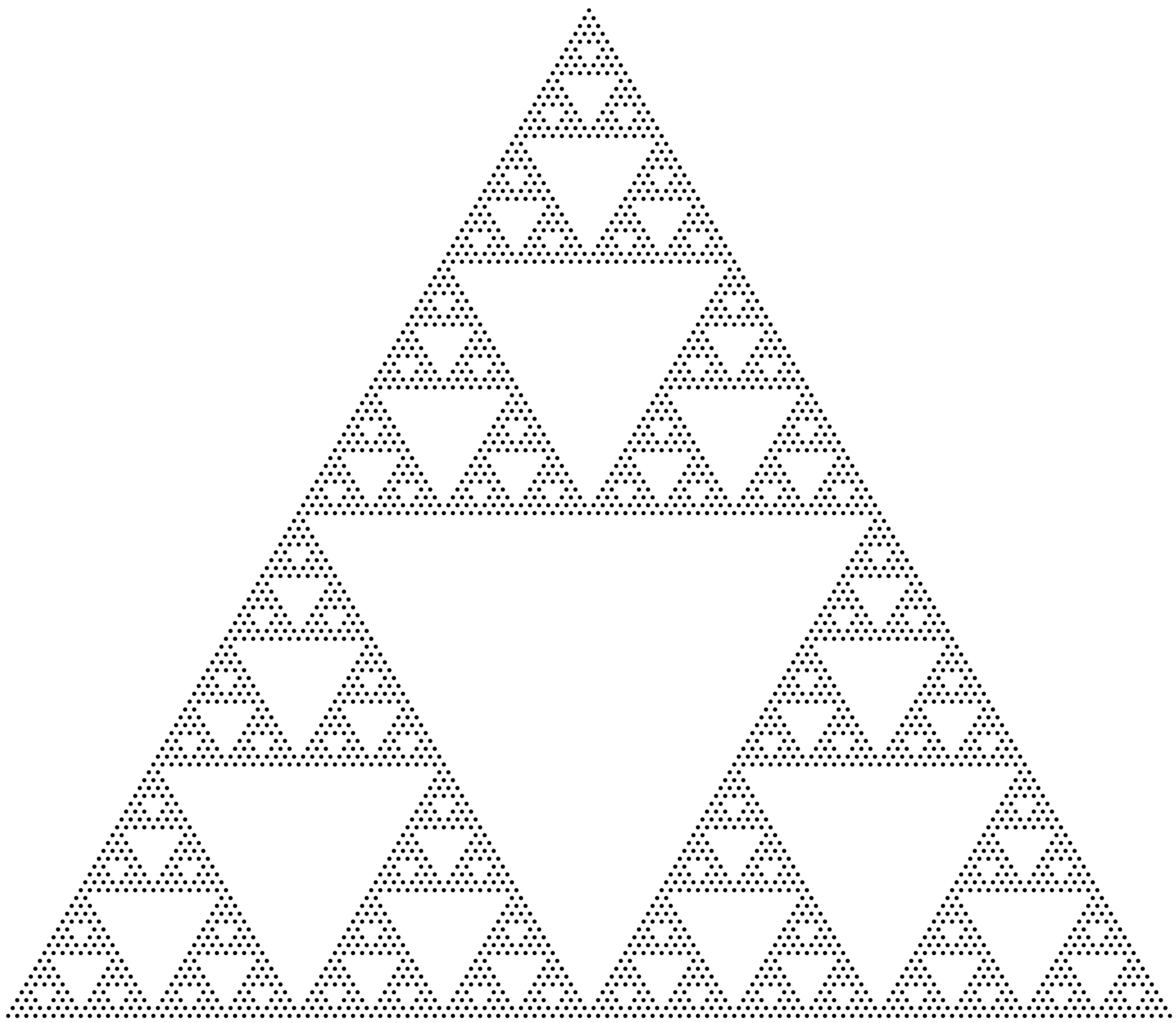
Летняя школа «Современная математика»

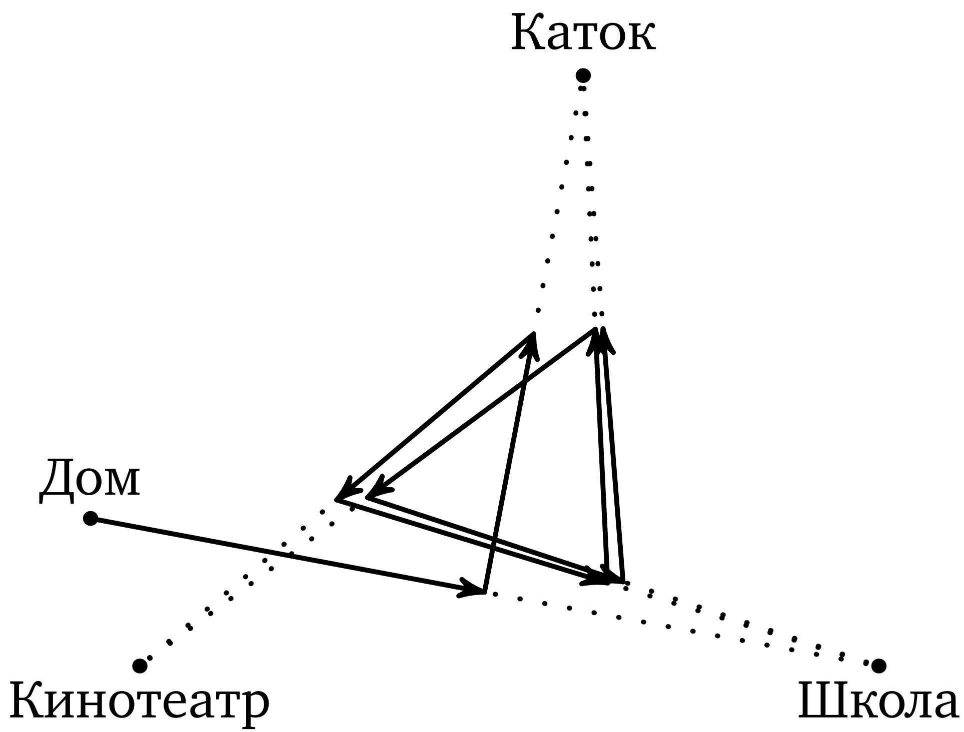
А. А. Кириллов

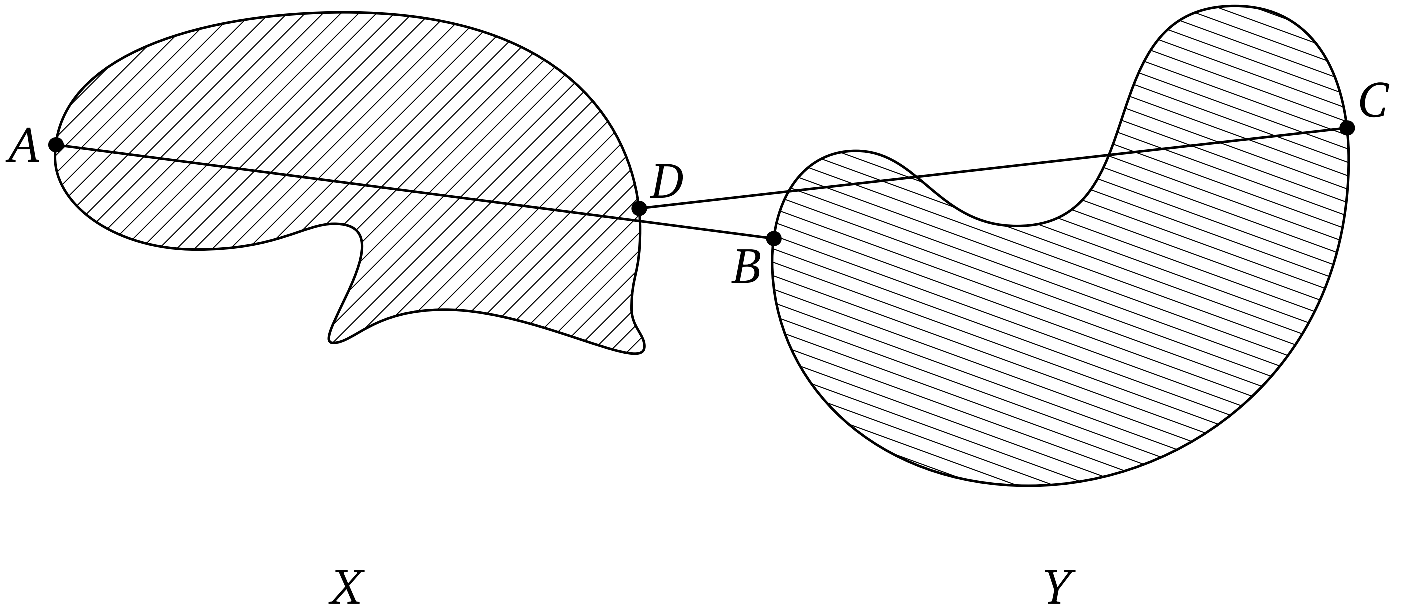
Главы из книги «Повесть о двух фракталах»

Дубна, Ратмино, июль 2009



Задача. Мальчик Петя вышел из своего дома и пошел в школу. На полпути к школе он решил прогулять школу и пойти на каток. На полпути к катку он подумал, что лучше пойти в кино. Однако на полпути к кинотеатру он снова передумал и свернул к школе. Куда придет мальчик Петя, если он будет продолжать двигаться таким образом?

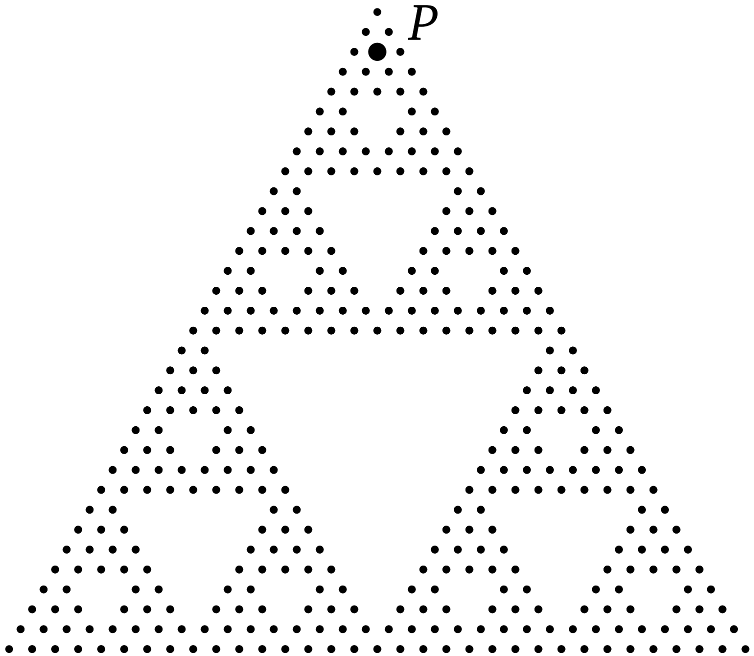




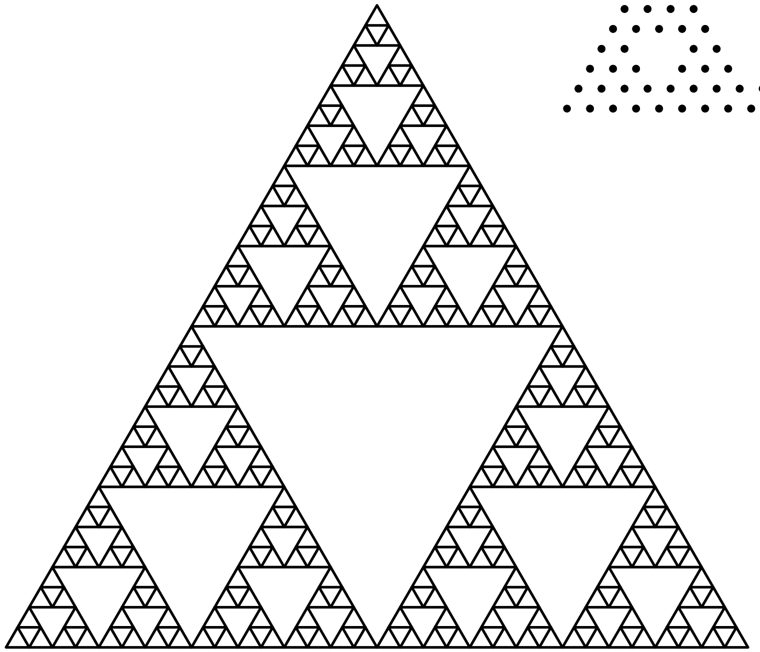
$$d(x, Y) := \min_{y \in Y} d(x, y)$$

$$d(X, Y) := \max_{x \in X} d(x, Y) + \max_{y \in Y} d(y, X)$$

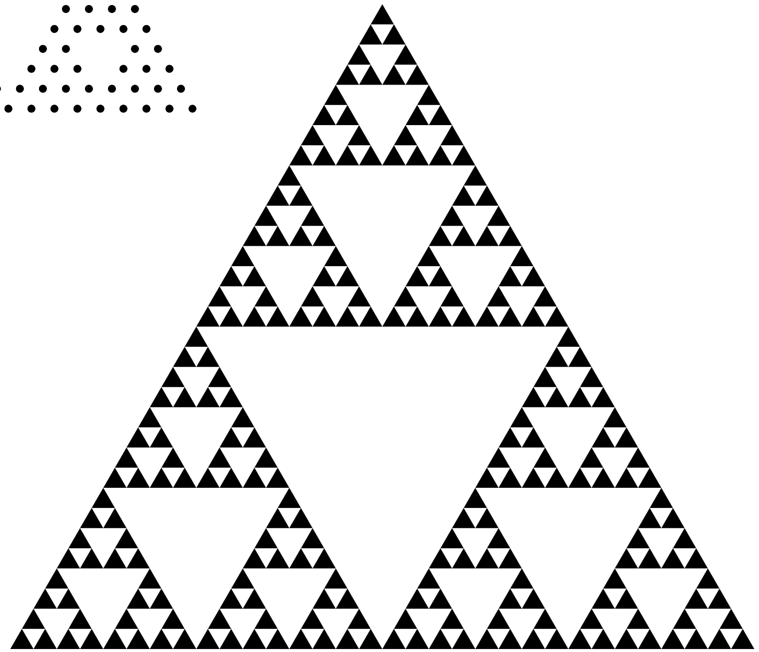
$$d(X, Y) := \max_{x \in X} \min_{y \in Y} d(x, y) + \max_{y \in Y} \min_{x \in X} d(x, y)$$



$\mathscr{S}_6$



$\mathscr{S}_6'$



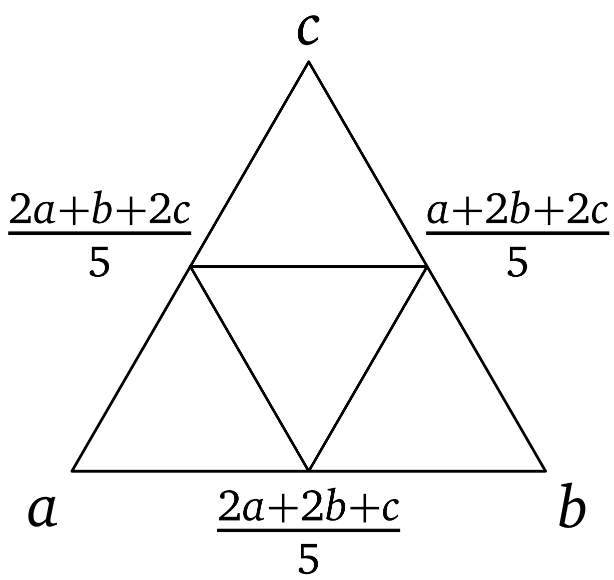
$\mathscr{S}_6''$

Лемма. Пусть x, y, z — три соседние точки на $\mathscr{S}_m$, образующие правильный треугольник, обращенный вершиной вверх. Положим

$$\alpha = \frac{y+z}{2}, \quad \beta = \frac{x+z}{2}, \quad \gamma = \frac{x+y}{2}.$$

Тогда α, β, γ также образуют правильный треугольник и являются соседними точками на $\mathscr{S}_{m+1}$ (см. рисунок). Для любой гармонической функции f на $\mathscr{S}_{m+1}$ мы имеем:

$$f(\alpha) = \frac{f(x)+2f(y)+2f(z)}{5},$$
$$f(\beta) = \frac{2f(x)+f(y)+2f(z)}{5},$$
$$f(\gamma) = \frac{2f(z)+2f(y)+f(x)}{5}.$$



Неформальный смысл этого результата: соседняя точка оказывает вдвое большее влияние, чем противоположная.

Теорема. Каждая гармоническая функция на $\mathscr{S}_\infty$ равномерно непрерывна и, следовательно, имеет единственное продолжение по непрерывности на $\mathscr{S}$.

Рассмотрим три отображения отрезка $[0, 1]$ в себя:

$$\alpha_0(t) = \tfrac{t}{2}, \quad \alpha_1(t) = \frac{1+t}{2} \quad \text{и} \quad \tau(t) = 1-t.$$

Они порождают линейные операторы в пространстве $C([0, 1])$ непрерывных функций на отрезке:

$$(A_0 f)(t) = f\left(\frac{t}{2}\right), \quad (A_1 f)(t) = f\left(\frac{1+t}{2}\right) \quad \text{и} \quad (Tf)(t) = f(1-t).$$

Оказывается, все три оператора A_0, A_1 и T переводят в себя трехмерное подпространство $\mathscr{H} \subset C([0, 1])$. Более того, операторы A_0 и A_1 имеют в $\mathscr{H}$ одинаковый спектр, состоящий из трех собственных значений: 1, $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{5}$. Соответствующими собственными функциями являются 1, ψ, χ для A_0 и 1, $1-\xi$, $1-\varphi$ для A_1.

Другими словами, если мы введем вектор-функции

$$\vec{f}(x) = \begin{pmatrix} \psi(x) \\ \chi(x) \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \vec{g}(x) = \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \xi(x) \\ 1 \end{pmatrix},$$

то справедливы равенства

$$\vec{f}\left(\frac{t}{2}\right) = A_0\vec{f}(t), \quad \vec{g}\left(\frac{1+t}{2}\right) = A_1\vec{g}(t), \quad \vec{f}(1-t) = T\vec{g}(t), \tag{1}$$

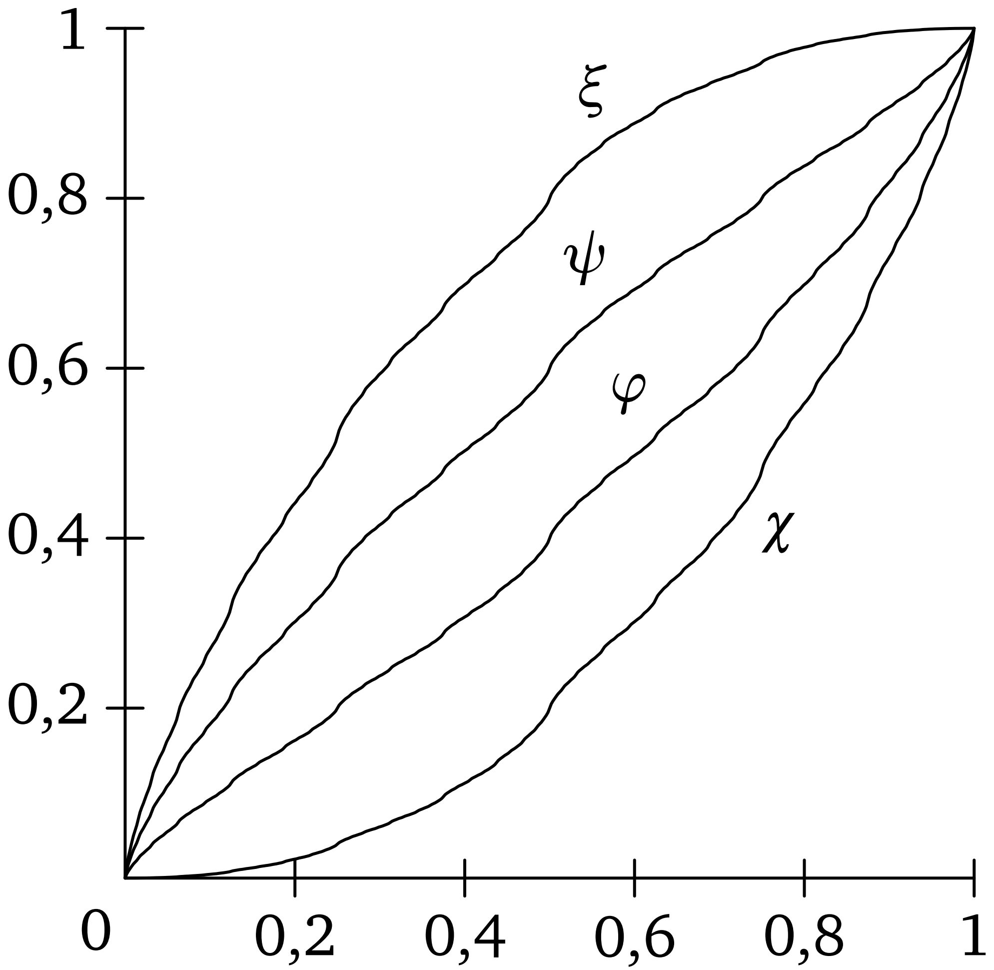
где

$$A_0 = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & 2/5 \\ 0 & 1/5 & 4/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Упражнение. С помощью равенств (1), (2) заполните пустые места в таблице значений базисных функций χ, φ, ψ, ξ в точках $k/8$, $k=0, 1, \ldots, 7, 8$.

	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	1
χ	0	$\frac{1}{125}$	$\frac{1}{25}$		$\frac{1}{5}$				1
φ	0				$\frac{2}{5}$			$\frac{98}{125}$	1
ψ	0	$\frac{27}{125}$	$\frac{9}{25}$		$\frac{3}{5}$				1
ξ	0				$\frac{4}{5}$		$\frac{24}{25}$		1

Из (1) мы выведем несколько удивительных свойств введенных выше функций. Например, мы исследуем поведение этих функций в окрестности любой двоично-рациональной точки $r=\frac{k}{2^n}$.



Базисные функции χ, φ, ψ, ξ

Существует метод быстрого подсчета значений функции $\chi(t)$ в двоично-рациональных точках. Он основан на соотношениях

$$\chi(2t) = 5\chi(t), \quad \chi\left(\frac{1+t}{2}\right) + \chi\left(\frac{1-t}{2}\right) = \frac{2+3\chi(t)}{5},$$

которые следуют из (1), (2).

Теорема. Для любого натурального k значение $\chi(k)$ является также натуральным числом. Более того, $\chi(k) \equiv k \mod 3$.

Значение этого наблюдения состоит в том, что мы теперь имеем дело с целочисленной функцией целого аргумента: продолженная функция χ принимает целые значения во всех целых точках. Таким образом мы автоматически попадаем в царство теории чисел.

В заключение этого раздела мы введем и начнем изучать еще одну целочисленную функцию натурального аргумента. А именно, положим

$$D(k) := \frac{\chi(k-1) - 2\chi(k) + \chi(k+1)}{3}. \quad (3)$$

По существу, это вторая разностная производная функции χ, поделенная на 3. Значения $D(k)$ для малых k приведены в таблице.

Эта таблица дает еще больше поводов для наблюдений и открытий, чем таблица значений $\chi(k)$. Например, уже имеющиеся данные позволяют предположить, что функция D обладает свойством

$$D(2k) = D(k). \quad (4)$$

Значения $D(k)$

k	$\chi(k)$	$\Delta\chi(k)$	$\Delta^2\chi(k)$	$D(k)$
0	0			
		1		
1	1		3	1
		4		
2	5		3	1
		7		
3	12		6	2
		13		
4	25		3	1
		16		
5	41		3	1
		19		
6	60		6	2
		25		
7	85		15	5
		40		
8	125		3	1
		43		
9	168		−6	−2
		37		
10	205		3	1
		40		
11	245		15	5
		55		
12	300		6	2
		61		
13	361			

Это заметно сокращает ее вычисление: достаточно вычислить значения в нечетных точках.

Далее, более тонкое наблюдение позволяет решить и эту задачу: функция D удовлетворяет соотношению

$$D(2k-1)+D(2k+1)=3D(k). \tag{5}$$

$$x = \varphi + \psi - 1 = \chi + \xi - 1; \quad y = \xi - \psi = \psi - \varphi = \varphi - \chi. \tag{6}$$

Когда t меняется от 0 до 1, x возрастает от -1 до 1, в то время как y растет от значения 0 до максимума $\frac{1}{5}$ при $x=0$, а потом убывает опять до 0.

Альтернативное (эквивалентное) определение: $x = u_{-1}{}^{0}{}_{1}$, $y = u_{0}{}^{1}{}_{0}$.

Теорема. Величина y является дифференцируемой функцией от x. Более точно, производная $y' = \frac{dy}{dx}$ существует и является непрерывной строго убывающей функцией x.

Следующие три проблемы открыты.

Задача 1. Подсчитать моменты

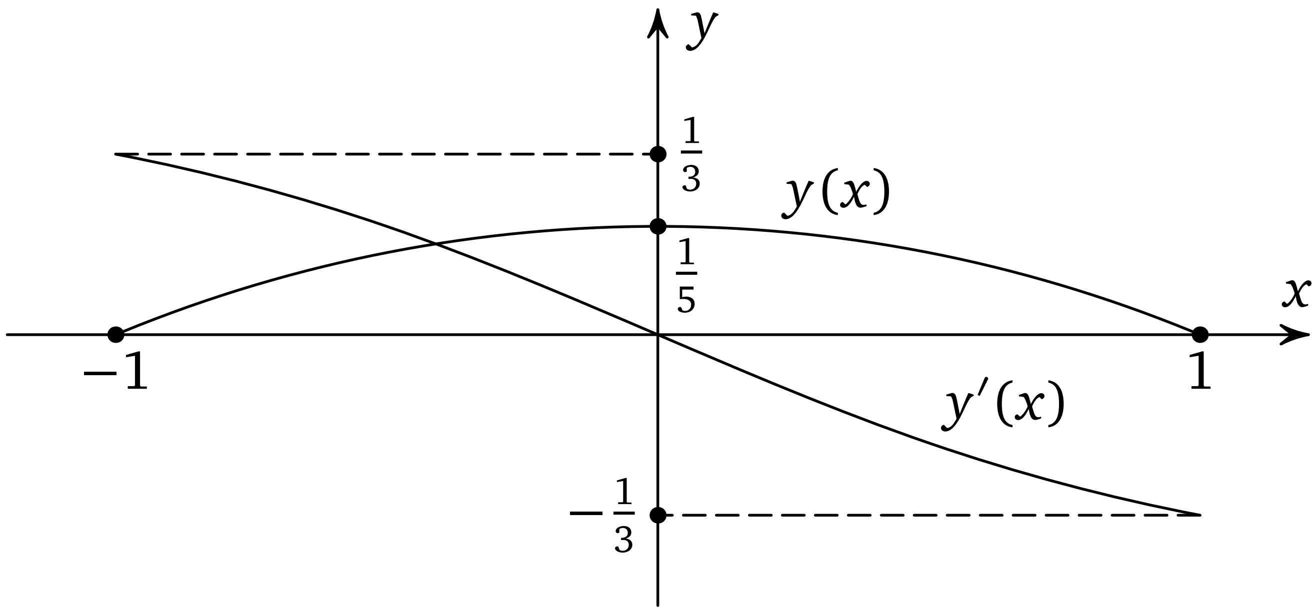
$$m_n := \int_{-1}^{1} x^n y \, dx. \tag{7}$$

Задача 2. Подсчитать коэффициенты Фурье

$$c_n := \int_{-1}^{1} e^{-\pi i n x} y \, dx. \tag{8}$$

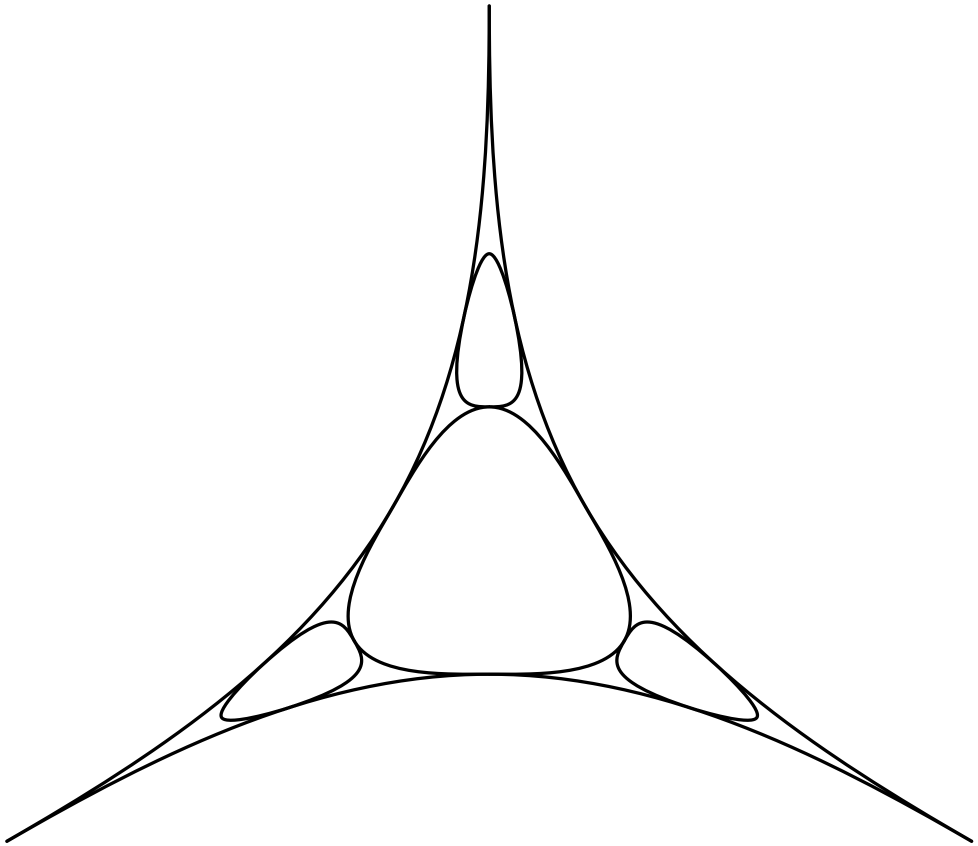
Задача 3. Исследовать дробные производные основных функций.

Например, интересно найти производную порядка $\alpha = \log_2 5$ от функции $\chi(t)$ и производную порядка $\beta = \log_2 \frac{5}{3}$ от функции $\psi(t)$ в окрестности нуля.

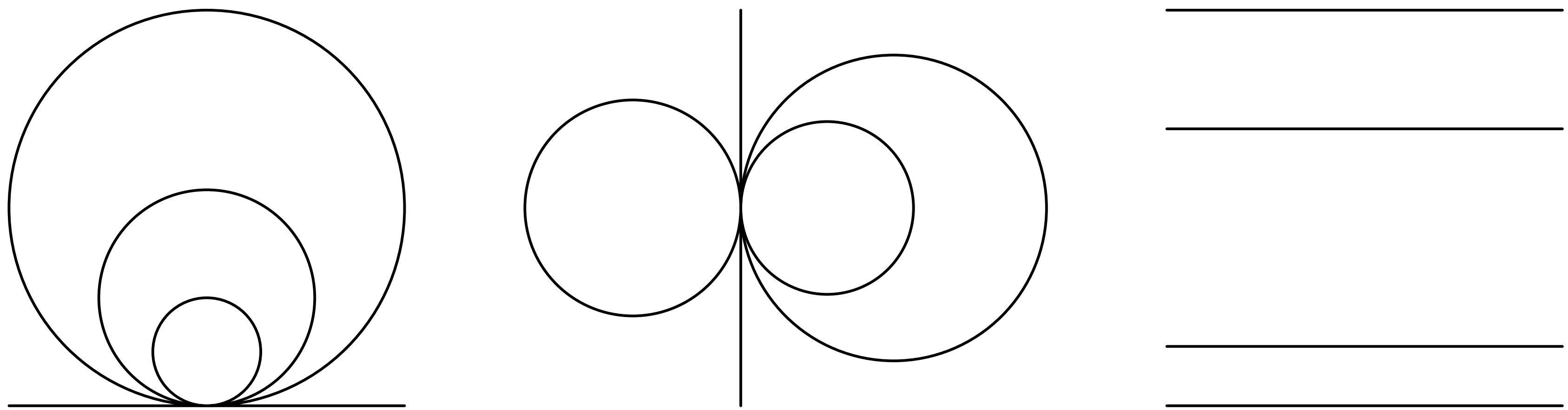


Графики функций $y(x)$ и $y'(x)$

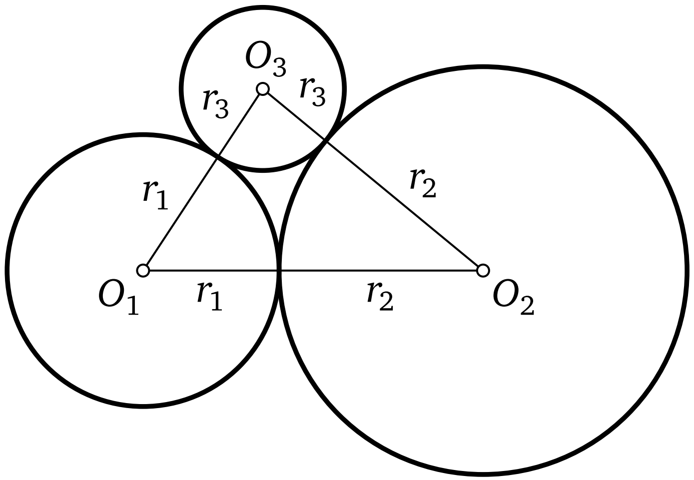
Упражнение. Найдите $x\left(\frac{5}{6}\right)$, $y\left(\frac{5}{6}\right)$ и значение $y'(x)$ в точке $x\left(\frac{5}{6}\right)$.



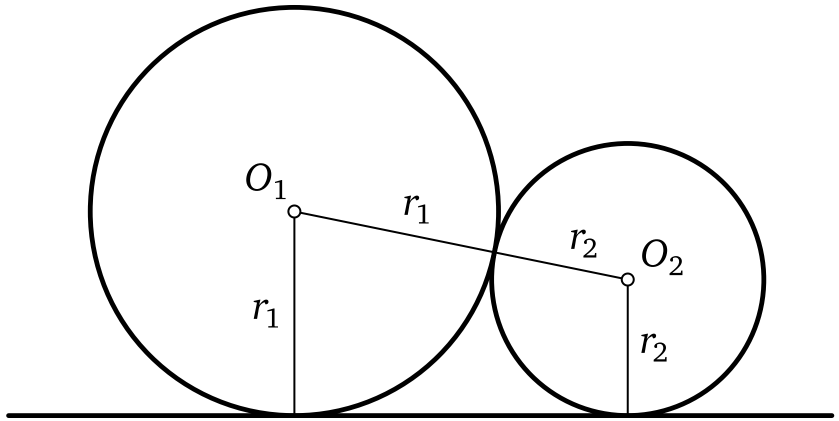
Гармонический образ $\tilde{\mathscr{S}}$ ковра Серпинского



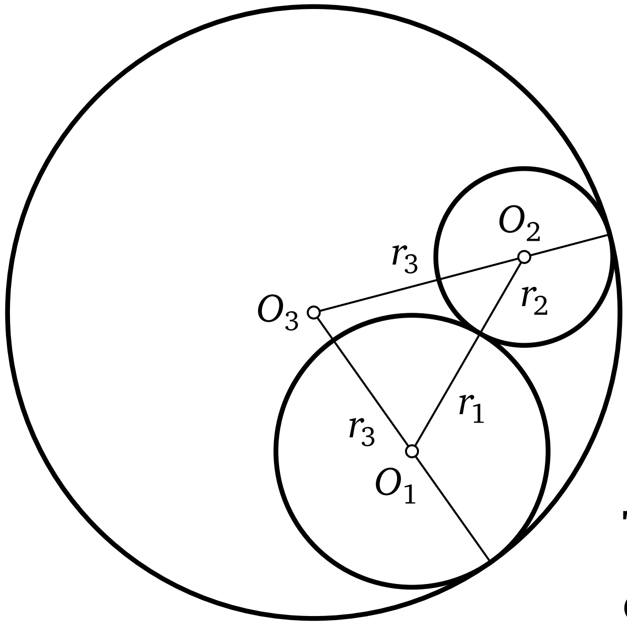
«Неправильные» четверки



Тройка касающихся окружностей типа а)



Тройка касающихся окружностей типа б)



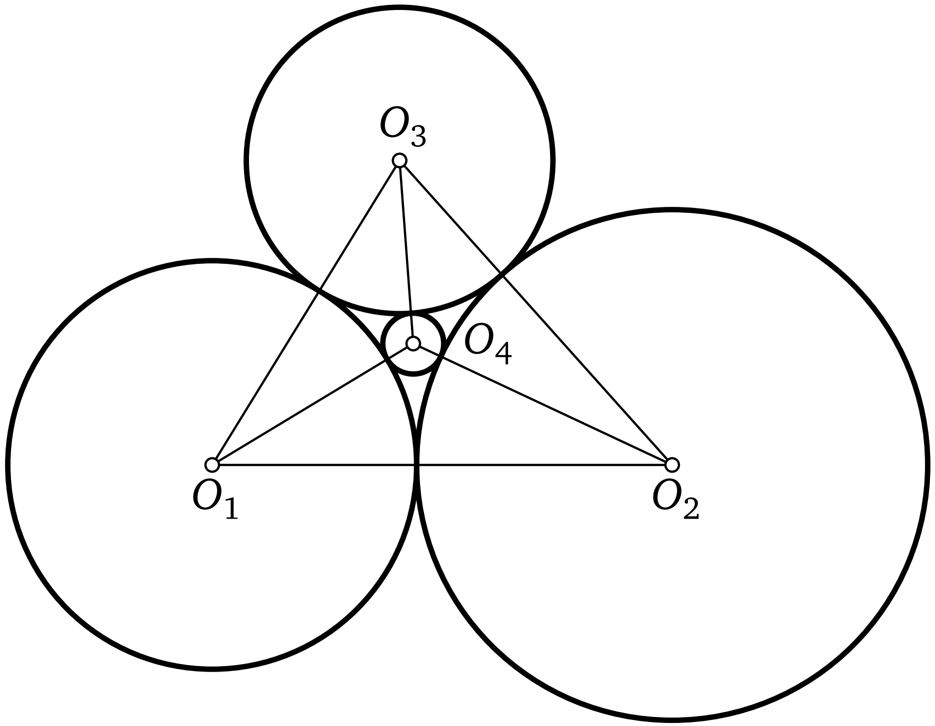
Тройка касающихся окружностей типа в)

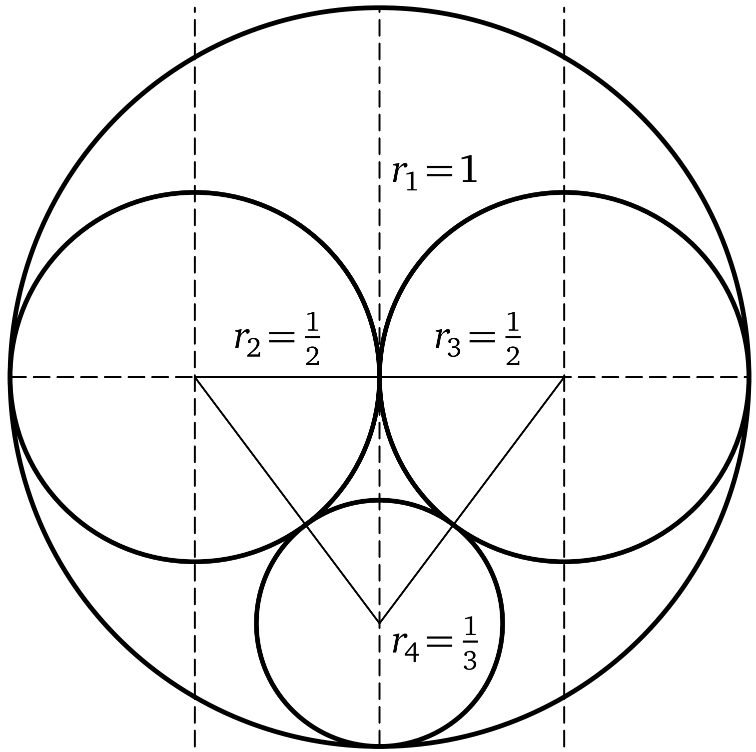
Если вместо радиусов r_i рассматривать обратные величины

$$c_i := r_i^{-1}, \quad 1 \leqslant i \leqslant 4,$$

то уравнение Декарта выглядит совсем просто:

$$(c_1 + c_2 + c_3 + c_4)^2 - 2(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2) = 0. \tag{9}$$





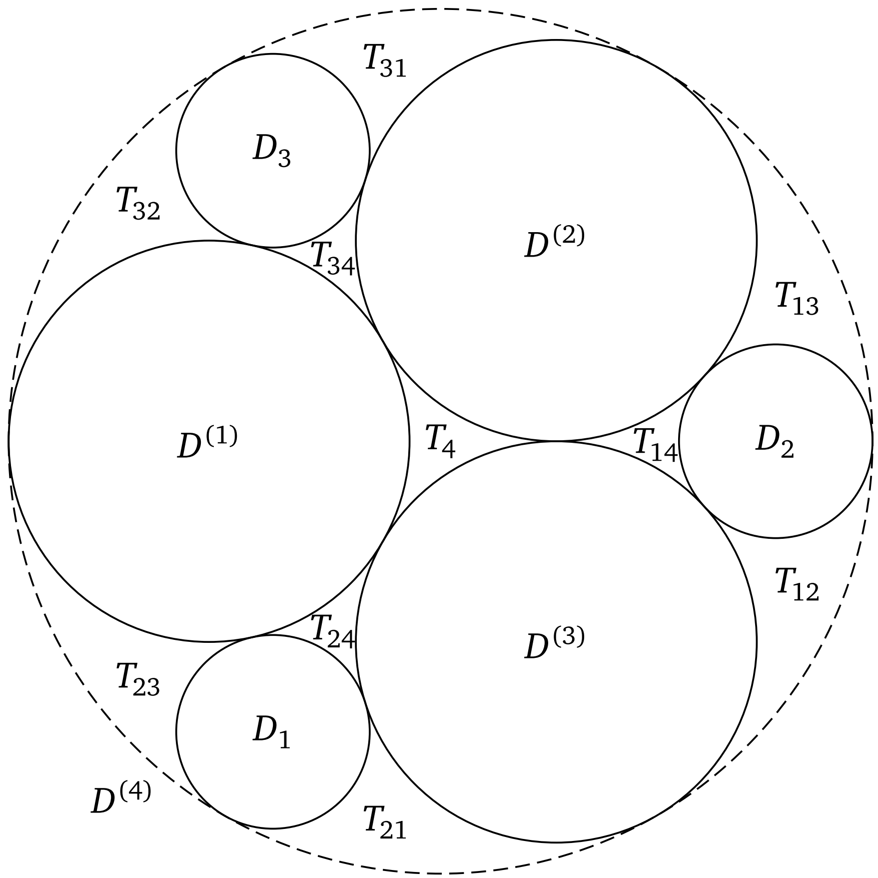
«Нарушение» уравнения Декарта

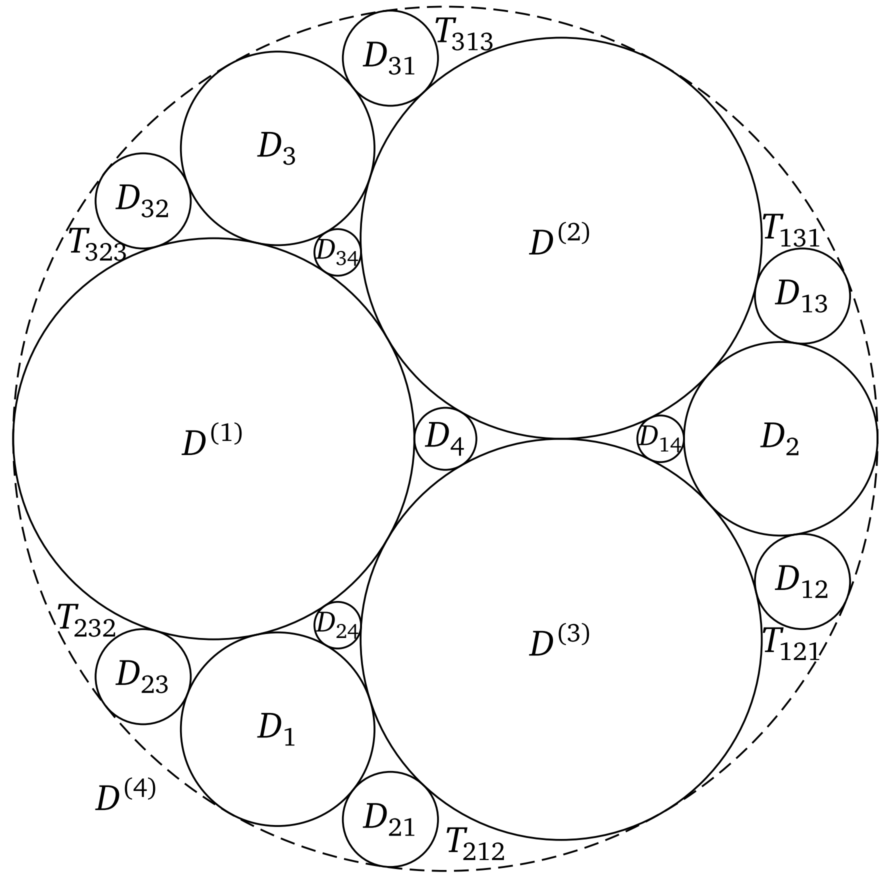
Если мы здесь положим $c_1 = 1$, $c_2 = c_3 = 2$, $c_4 = 3$, то придем к неверному равенству

$$
\begin{aligned}
64 &= (1+2+2+3)^2 = \\
&= 2(1+4+4+9) = \\
&= 36.
\end{aligned}
$$

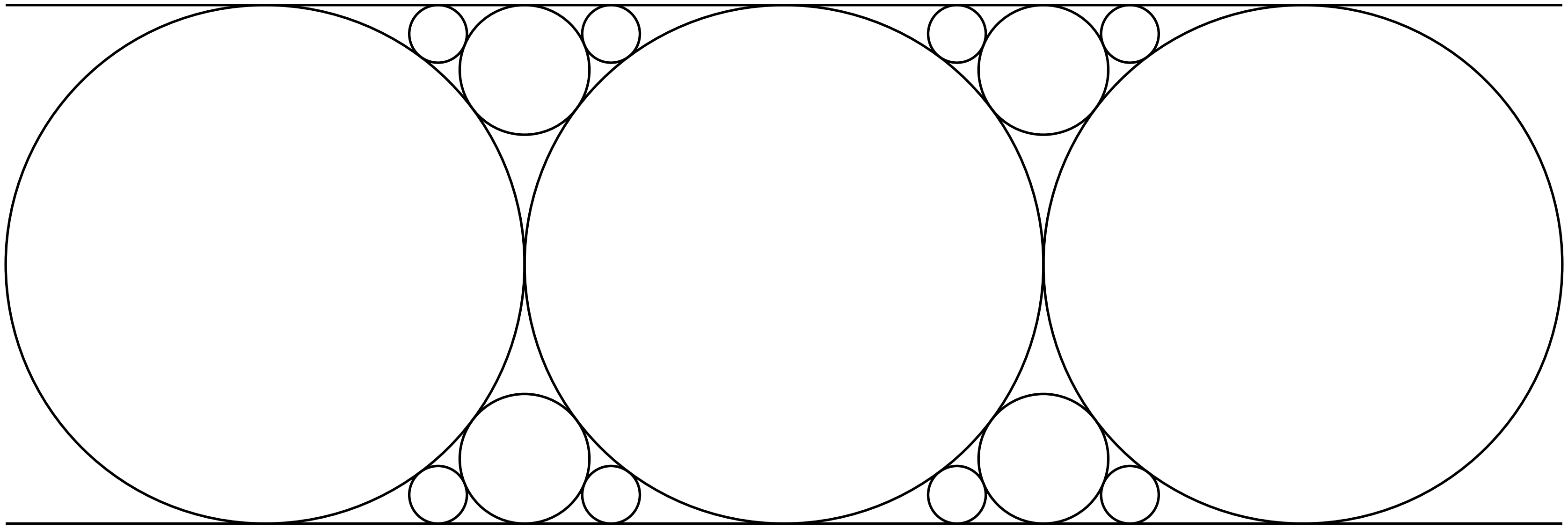
Но если мы будем считать кривизну внешней окружности равной -1, то получим верное равенство

$$
\begin{aligned}
36 &= (-1+2+2+3)^2 = \\
&= 2(1+4+4+9) = \\
&= 36.
\end{aligned}
$$

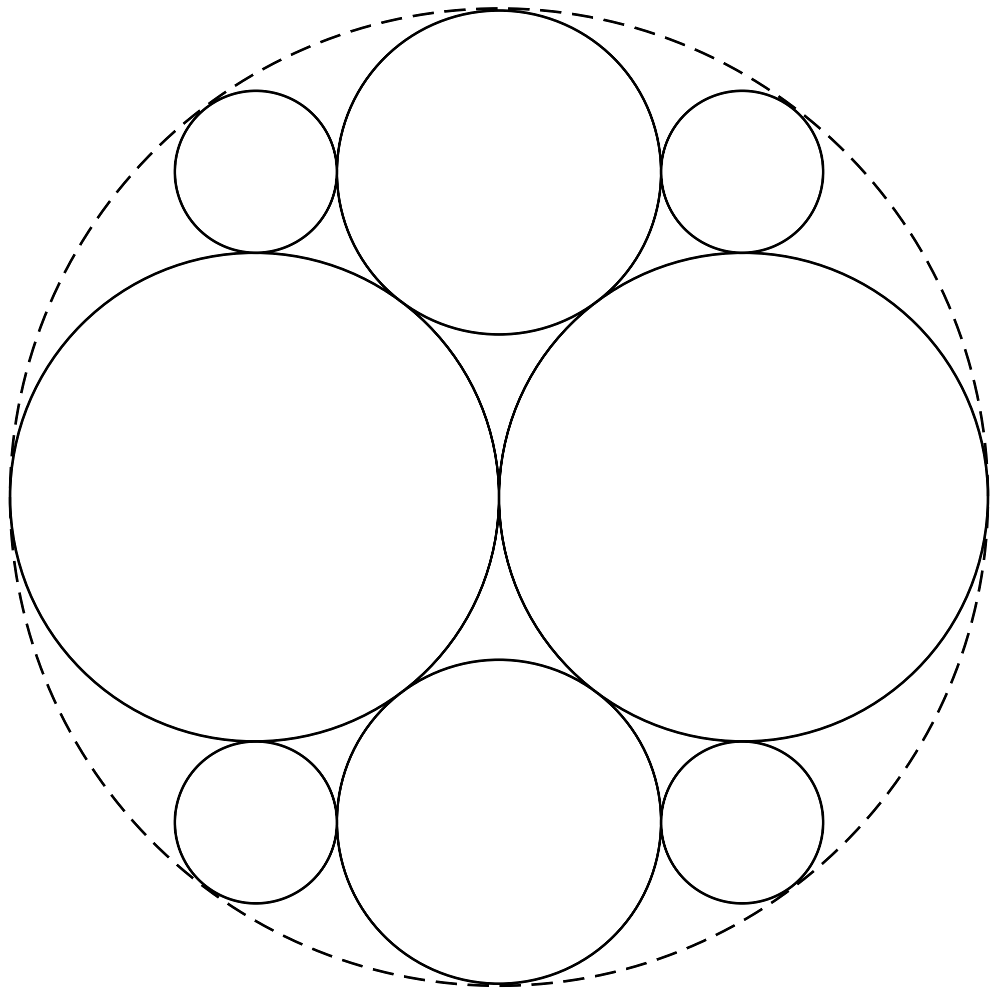




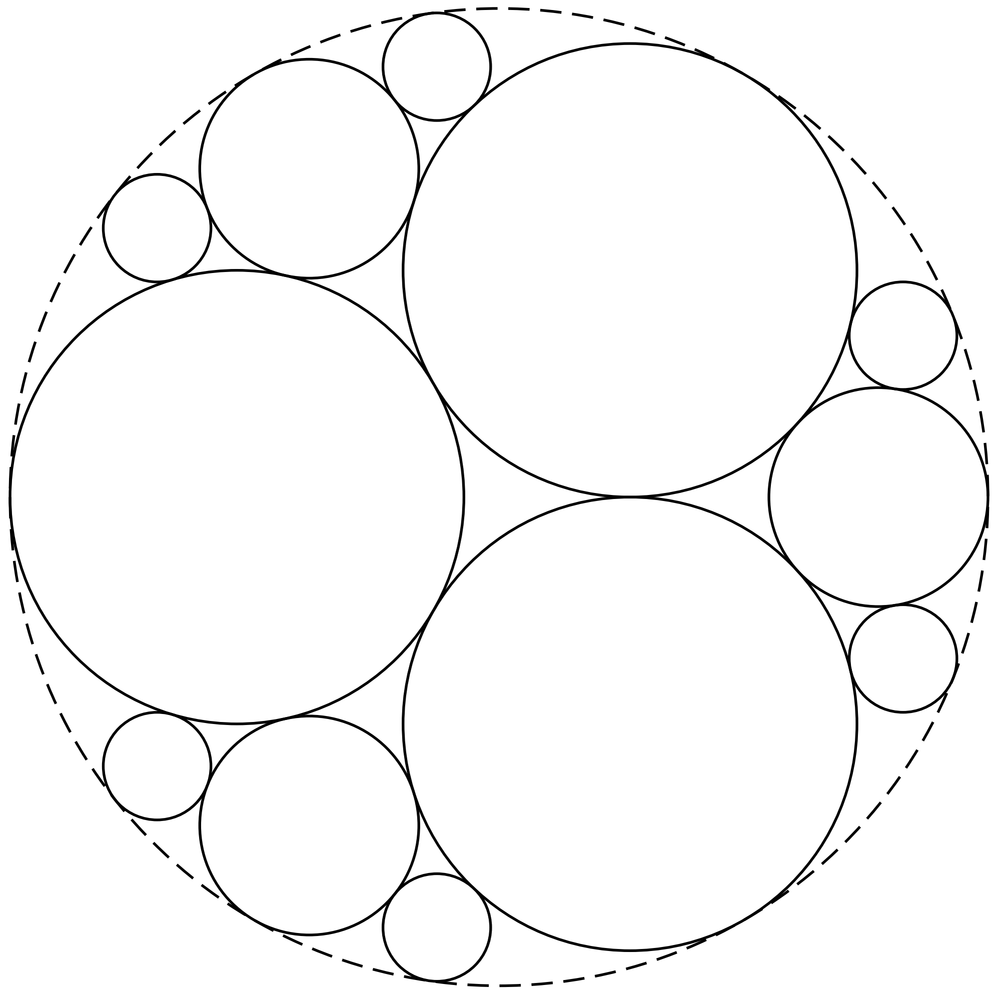
Нумерация кругов



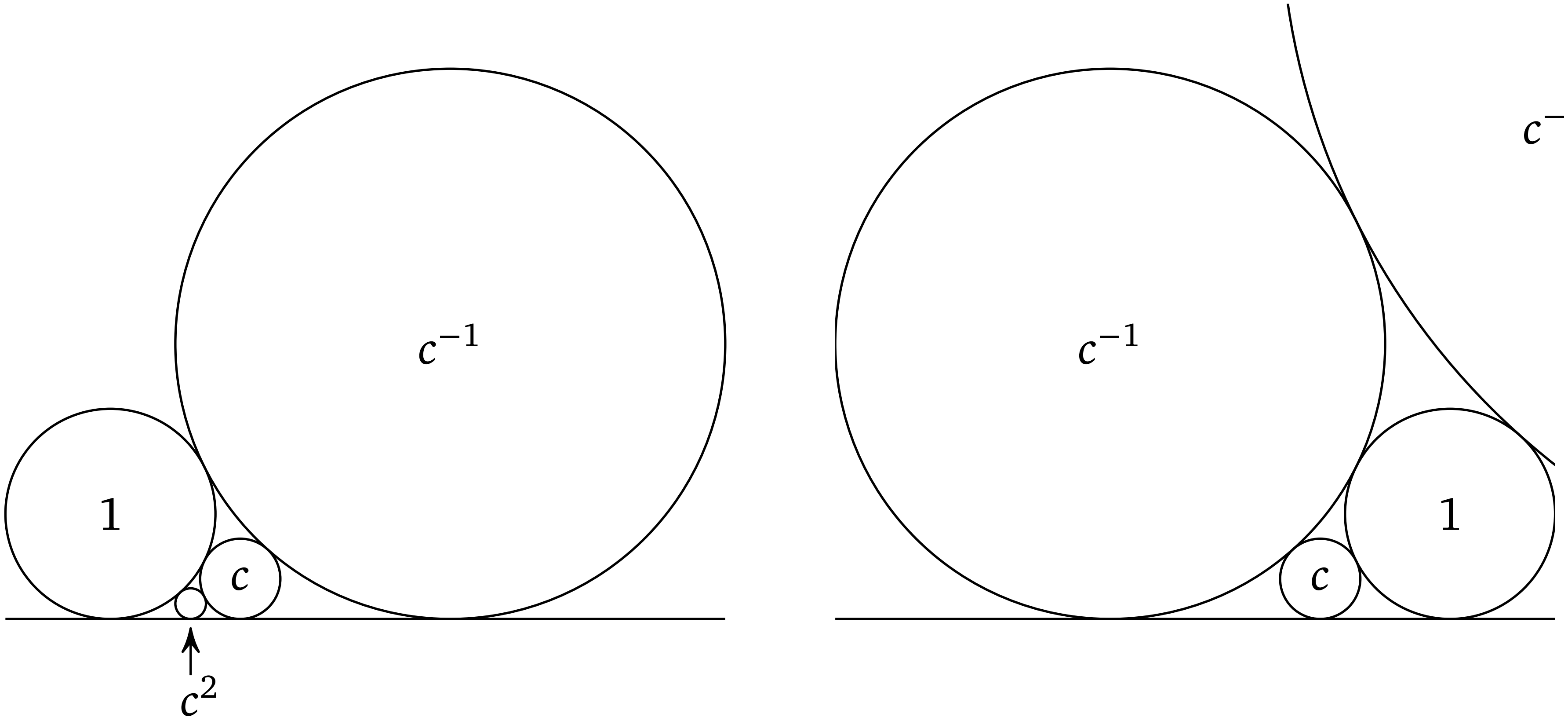
Ковер-лента



Прямоугольный ковер

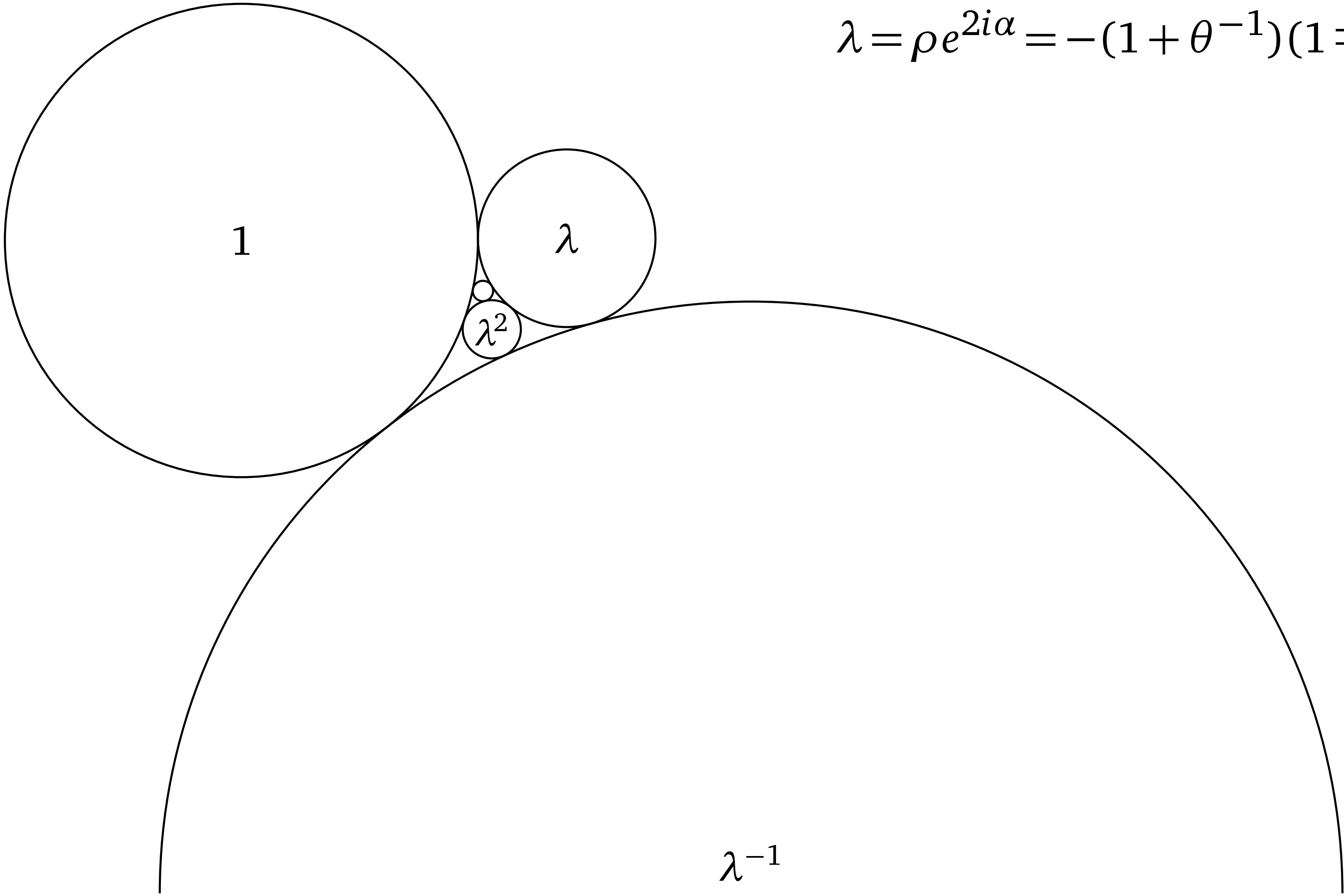


Треугольный ковер



Ковры с неограниченными размерами кругов: $\mathscr{A}_1$ и $c \cdot \mathscr{A}_1$

$$\lambda = \rho e^{2i\alpha} = -(1+\theta^{-1})(1 \mp i\theta).$$



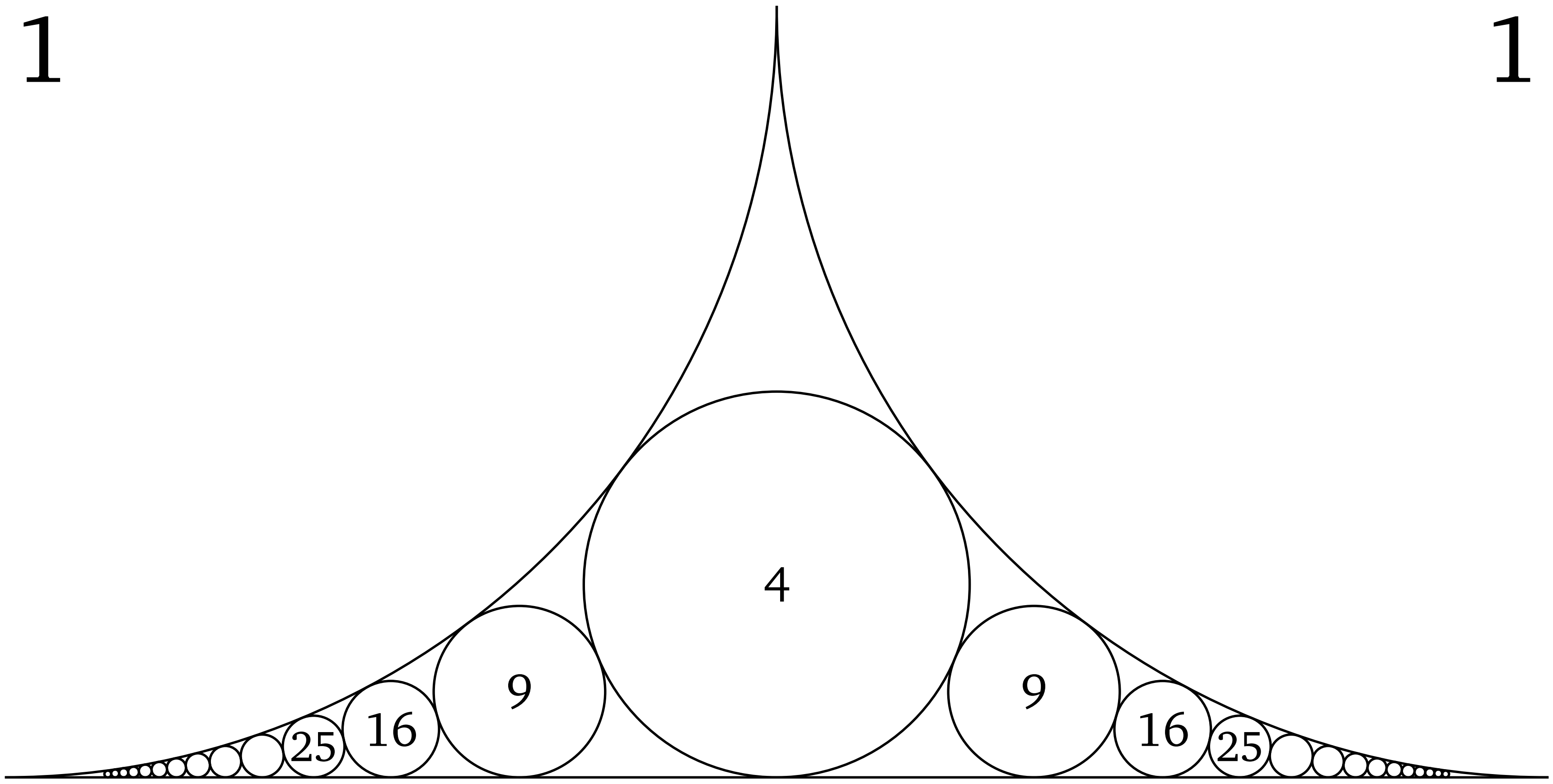
Ковер $\mathscr{A}_2$

Три интерпретации множества $\mathscr{D}$:

а) Круги на сфере

б) Векторы из пространства Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$ со скалярным квадратом -1

в) Эрмитовы 2×2 матрицы M с $\det M = -1$.



Квадратичные последовательности кривизн

Замечание. Замечательный способ занумеровать все положительные рациональные числа обнаружили недавно Нил Калкин и Херберт Вилф.

Пусть $\boldsymbol{b}(n)$ — число разбиений $n \geqslant 0$ в сумму степеней двойки, в которых никакая степень не используется больше двух раз. Тогда отношение $r_n = \dfrac{\boldsymbol{b}(n)}{\boldsymbol{b}(n+1)}$ принимает каждое положительное рациональное значение в точности один раз! Начальный кусок этой нумерации выглядит так:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$\boldsymbol{b}(n)$	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1	5	7
r_n	1	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	3	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{4}$	4	$\frac{1}{5}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{7}{4}$
n	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33		
$\boldsymbol{b}(n)$	3	8	5	7	2	7	5	8	3	7	4	5	1	6	5	4		
r_n	$\frac{3}{7}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{5}$	6	$\frac{5}{6}$	$\frac{9}{5}$		

Интересно сравнить эту нумерацию с той, которая получается из рассмотрения рядов Фарея.

Назовем два числа $r_i = \frac{p_i}{q_i}$, $i = 1, 2$, из $\overline{\mathbb{Q}}$ *близкими*, если выполнены следующие эквивалентные условия:

$$\text{а)}\ \ |p_1 q_2 - p_2 q_1| = 1, \qquad \text{б)}\ \ |r_1 - r_2| = \frac{1}{|q_1 q_2|}. \tag{10}$$

Стоит отметить, что отношение близости *не является*[*] отношением эквивалентности: каждое целое число близко к бесконечности, но только соседние целые числа близки друг к другу.

[*]Как и в обычной жизни.

Теперь мы определим новую операцию[†] «вставки» на $\overline{\mathbb{Q}}$. Эта операция сопоставляет паре рациональных чисел (r_1, r_2) третье рациональное число, обозначаемое $r_1 \downarrow r_2$, так, что выполняются условия: существуют такие целые p_1, p_2, q_1, q_2, удовлетворяющие условиям

$$\text{НОД}(p_1, q_1) = \text{НОД}(p_2, q_2) = 1,$$

что

$$r_1 = \frac{p_1}{q_1}, \quad r_2 = \frac{p_2}{q_2}, \quad r_1 \downarrow r_2 = \frac{p_1 + p_2}{q_1 + q_2}; \tag{11}$$

$$\text{точка } r_1 \downarrow r_2 \text{ лежит между } r_1 \text{ и } r_2. \tag{12}$$

[†]Как я узнал от Р. Борчердса, в Англии эту операцию называют «сложением дробей для филологов». Она также служит предметом одного из анекдотов, часто цитировавшихся на семинаре Гельфанда.

Модифицированные ряды Фарея ранга $\leqslant 3$ показаны ниже:

$k:$								0								1								2
$f_k^{(0)}:$								$\frac{0}{1}$								$\frac{1}{1}$								$\frac{1}{0}$
$k:$				-1				0				1				2				3				4
$f_k^{(1)}:$				$-\frac{1}{1}$				$\frac{0}{1}$				$\frac{1}{2}$				$\frac{1}{1}$				$\frac{2}{1}$				$\frac{1}{0}$
$k:$		-3		-2		-1		0		1		2		3		4		5		6		7		8
$f_k^{(2)}:$		$-\frac{2}{1}$		$-\frac{1}{1}$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{0}{1}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{1}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{2}{1}$		$\frac{3}{1}$		$\frac{1}{0}$
$k:$	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$f_k^{(3)}:$	$-\frac{3}{1}$	$-\frac{2}{1}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{1}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{1}{0}$

Найти явную формулу для чисел $f_k^{(n)}$ — нетривиальная задача. Мы обсудим ее ниже.

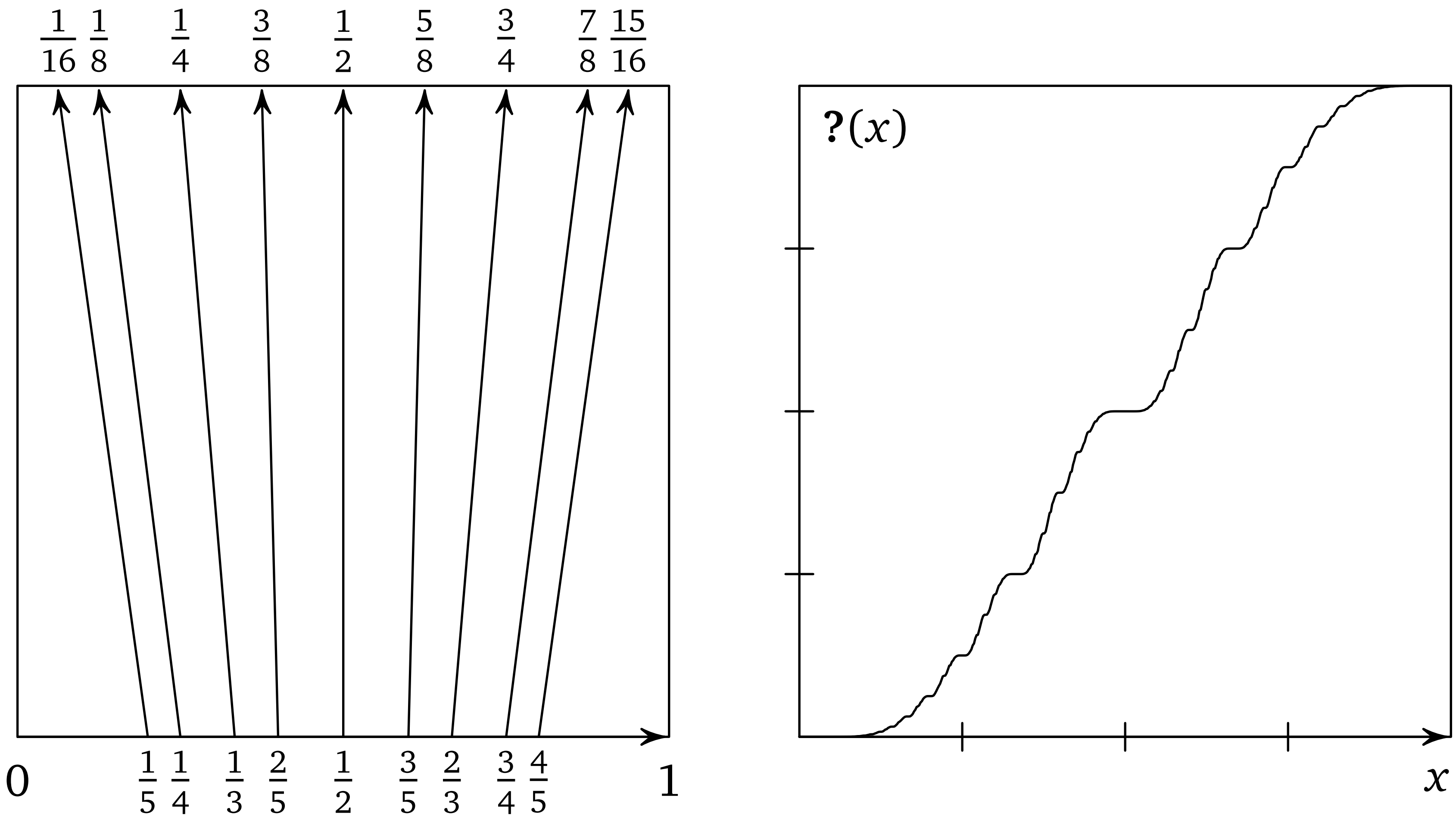
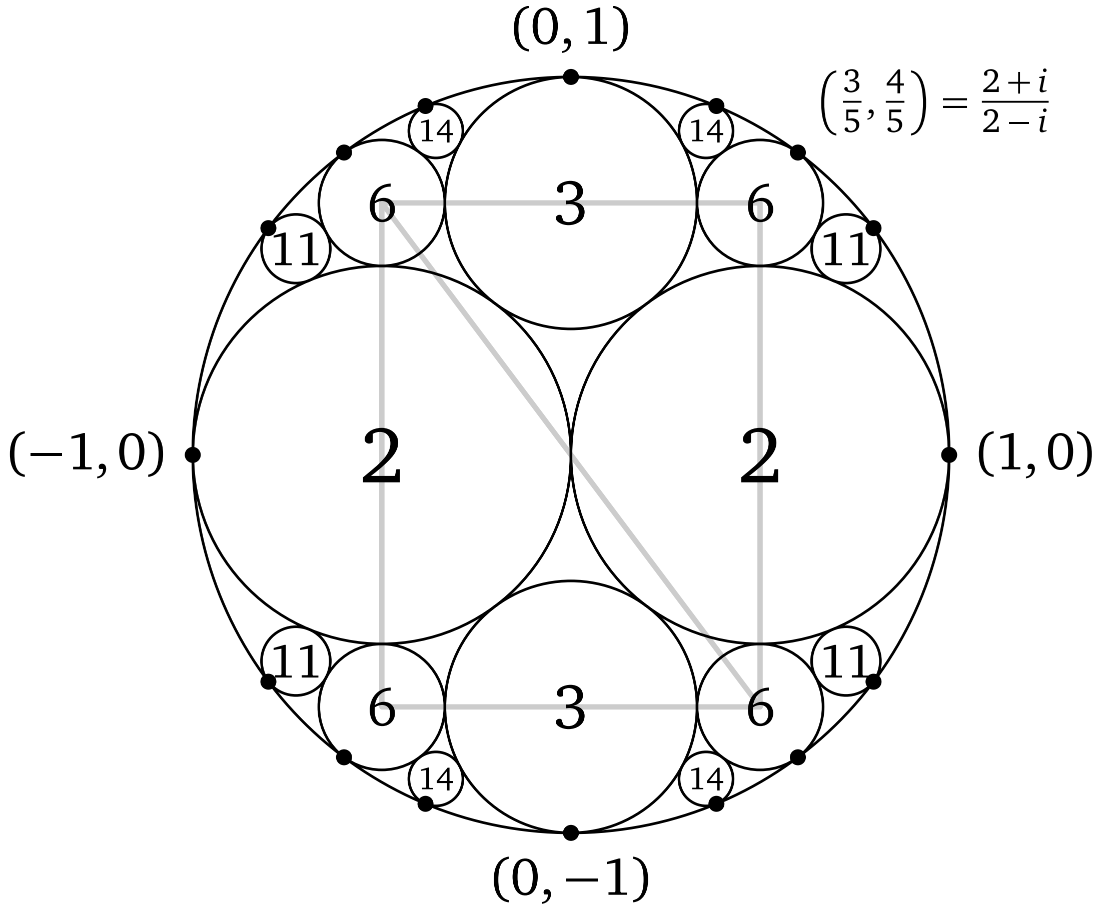


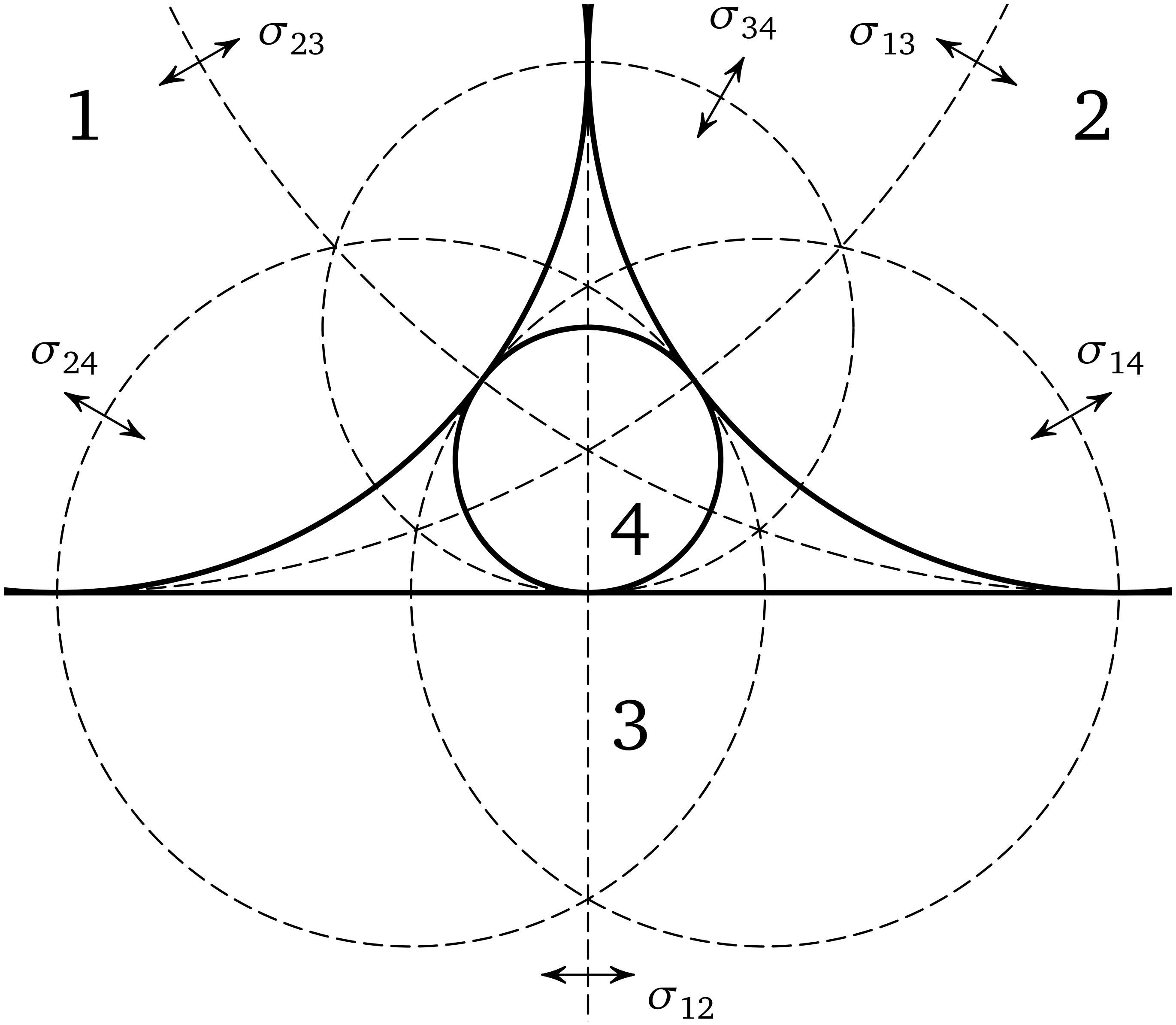
График функции **?**



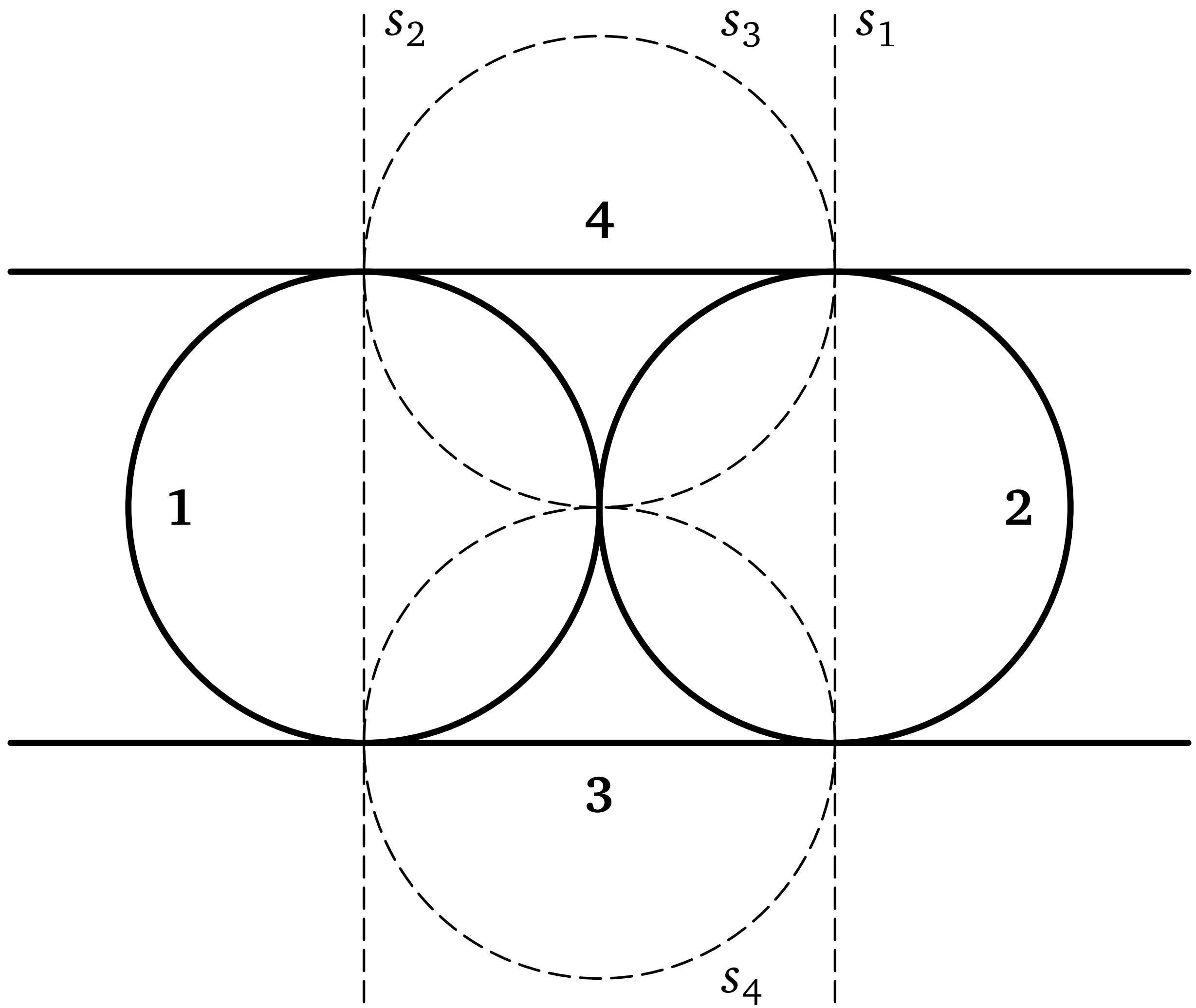
$$c_{p/q} = 1 + p^2 + q^2$$

$$t_{p/q} = \frac{p + iq}{p - iq}$$

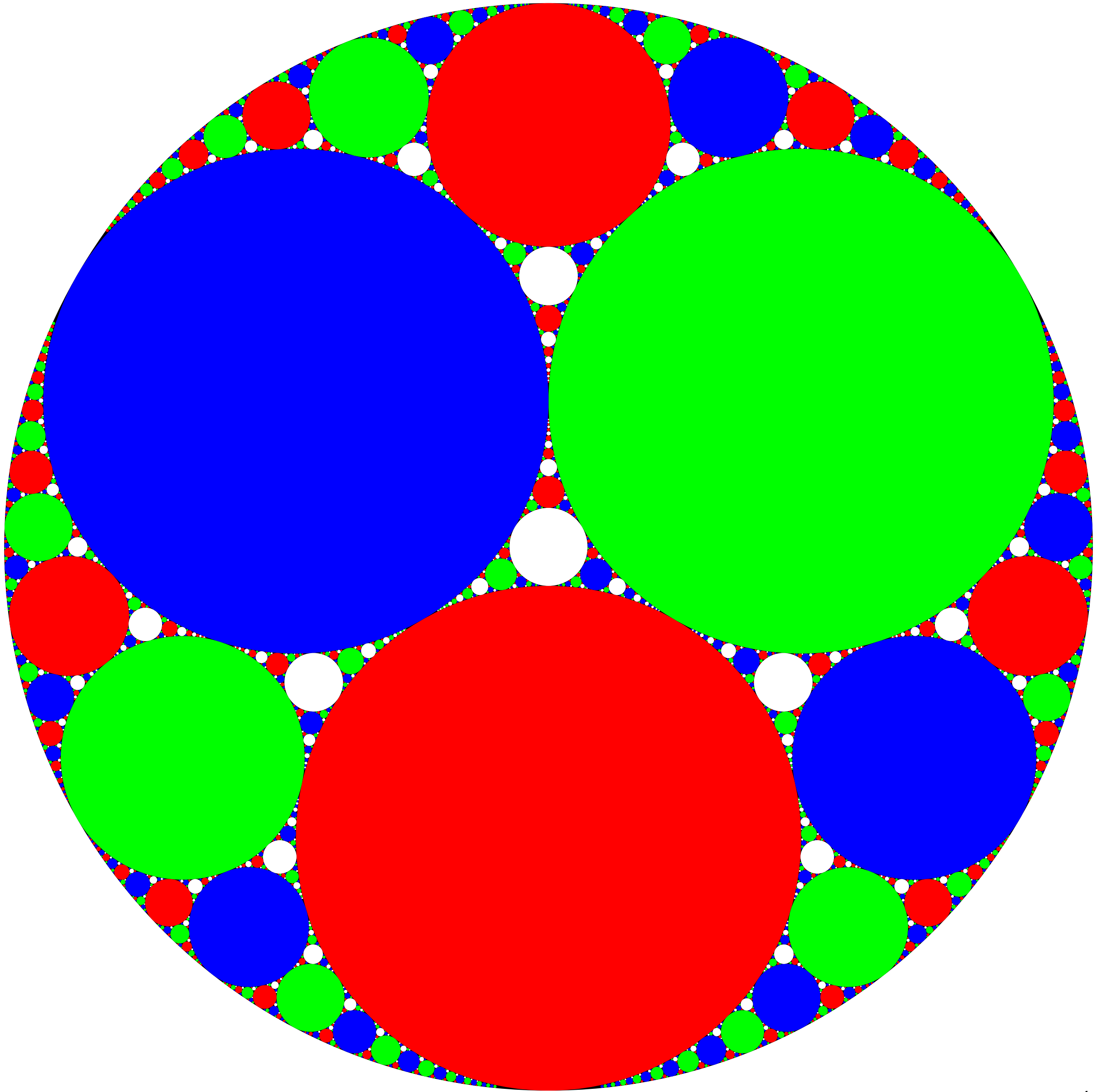
Совершенная параметризация внешней окружности
в прямоугольном ковре



Отражения из группы W



Базисные зеркала группы Г



Орбиты группы Г

Понятие совершенной параметризации кругов может быть обобщено на 3-мерный случай. Рассмотрим поле алгебраических чисел $K=\mathbb{Q}[\varepsilon]$, где $\varepsilon=e^{2\pi i/3}$—кубический корень из единицы. Общий элемент этого поля имеет вид $k=\alpha\varepsilon+\beta\bar{\varepsilon}$, где $\alpha,\beta\in\mathbb{Q}$, а черта означает комплексное сопряжение. Можно рассматривать K как двумерное пространство над полем $\mathbb{Q}$ с базисом ε и $\bar{\varepsilon}$. Операция умножения на k в этом базисе записывается матрицей $M(k)=\begin{pmatrix}-\beta & \alpha-\beta\\ \beta-\alpha & -\alpha\end{pmatrix}$. Определим след и норму числа $k\in K$ как след и определитель $M(k)$ соответственно:

$$\operatorname{tr}k=k+\bar{k}=\alpha+\beta,\quad \|k\|_K^2=|k|^2=k\bar{k}=\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2. \tag{13}$$

Через E мы обозначим подмножество K, выделяемое условиями $\alpha\in\mathbb{Z}$, $\beta\in\mathbb{Z}$. Элементы E—это целые числа поля K. Существует шесть обратимых целых чисел: $\pm1,\pm\varepsilon,\pm\bar{\varepsilon}$. Они характеризуются условием $\|k\|=1$ и называются *единицами* поля K. Известно, что каждое целое число однозначно (по модулю единиц) разлагается в произведение *простых* чисел, то есть таких, которые делятся только на себя и на единицы. Что касается простых чисел, они бывают двух сортов: обычные простые числа вида $p=3m-1$ и такие комплексные числа $k=a\varepsilon+b\bar{\varepsilon}$ с целыми a, b, для которых квадрат нормы равен 3 или обычному простому числу вида $3m+1$.

Начало списка простых чисел поля K имеет вид

$$2,\ \varepsilon-\bar{\varepsilon},\ 5,\ 2\varepsilon-\bar{\varepsilon},\ 11,\ 3\varepsilon-\bar{\varepsilon},\ 17,\ 3\varepsilon-2\bar{\varepsilon},\ 23,\ 29,\ 5\varepsilon-\bar{\varepsilon}, 4\varepsilon-3\bar{\varepsilon}, \dots$$

Из сказанного следует, что каждый элемент $k\in K$ может быть однозначно (по модулю единиц) записан в виде несократимой дроби $k=\frac{p}{q}$, где $p, q\in E$ не имеют общих множителей, не считая единиц. Можно также записать k в виде $k=\frac{l\varepsilon+m\bar{\varepsilon}}{n}$, где l, m, n — обычные целые числа с НОД$(l, m, n)=1$.

Определение. Пусть D — трехмерный шар в целочисленном 3-мерном ковре Аполлония. Параметризация множества ∂D точками $\overline{\mathbb{R}^2}$ называется *совершенной*, если точки касания D с остальными шарами в точности соответствуют точкам $\overline{K}\subset\overline{\mathbb{R}^2}$.

Пусть $D_k \in \mathscr{A}$ означает шар, касающийся D в точке $k = \frac{p}{q} \in \overline{K}$. (Если $q = 0$, $k = \infty \in \overline{K}$.)

Теорема. Совершенные параметризации существуют и обладают следующими свойствами:

а) Пусть $K \ni k = \frac{p}{q}$. Кривизна c_k границы шара D_k дается формулой

$$c_k = \alpha|p|^2 + \beta p\bar{q} + \bar{\beta}\bar{p}q + \gamma|q|^2 + \delta, \tag{14}$$

где $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{C}$.

б) Существует такая координатная система (x_1, x_2, x_3) в окружающем $\mathbb{R}^3$, что

$$x_i = \frac{\alpha_i|p|^2 + \beta_i p\bar{q} + \bar{\beta}_i\bar{p}q + \gamma_i|q|^2 + \delta_i}{\alpha|p|^2 + \beta p\bar{q} + \bar{\beta}\bar{p}q + \gamma|q|^2 + \delta}. \tag{15}$$

в) Пусть $k_i = \frac{p_i}{q_1}$, $i = 1, 2$. Шары D_{k_1} и D_{k_2} касаются тогда и только тогда, когда

$$|k_1 - k_2| = \frac{1}{|q_1 q_2|}. \tag{16}$$

Мы оставляем читателю в качестве нелегкой самостоятельной работы доказать сформулированную теорему и найти ее матричный аналог.

В заключение мы проиллюстрируем эту теорему двумя примерами совершенных параметризаций в 3-мерном ковре Аполлония.

Введем в $\mathbb{R}^3$ ортогональный базис $1, i, j$. Шару с центром $x+iy+jz$ и радиусом $r>0$ мы поставим в соответствие эрмитову кватернионную матрицу $\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & c \end{pmatrix}$, где $c=\frac{1}{r}$, $b=\dfrac{x+iy+jz}{r}$, $\bar{b}=\dfrac{x-iy-jz}{r}$, $a=\dfrac{x^2+y^2+z^2-r^2}{r}$.

Наш ковер $\mathscr{A}$ будет 3-мерным аналогом ковра-ленты на плоскости. В него входят два обобщенных шара, один из которых—полупространство $z\geqslant 1$, а другой—полупространство $-z\geqslant 1$. Они соответствуют матрицам $M_{\pm}= = \begin{pmatrix} 2 & \mp j \\ \pm j & 0 \end{pmatrix}$. Далее, наш ковер содержит счетное множество единичных шаров, соответствующих матрицам $\begin{pmatrix} |v|^2-1 & v \\ -\bar{v} & 1 \end{pmatrix}$, где вектор v пробегает решетку $V\subset\mathbb{C}$, порожденную векторами 2ε и $2\bar{\varepsilon}$.

Первый пример совершенной параметризации—это параметризация всех шаров, касающихся плоскости $z=1$, элементами $\bar{K}$. А именно, точке $k=\frac{p}{q}\in\bar{K}$

мы ставим в соответствие матрицу

$$M_k = \begin{pmatrix} 4|p|^2+|q|^2-2 & 2p\bar{q}+(1-|q|^2)j \\ 2\bar{p}q-(1-|q|^2)j & |q|^2 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Соответствующий шар касается плоскости в точке

$$t_k = -2\frac{p}{q} + \left(1 - \frac{1}{|q|^2}\right)j$$

и имеет радиус $r = \frac{1}{|q|^2}$.

Второй пример—параметризация всех шаров, касающихся единичного шара с матрицей $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Здесь формула выглядит так:

$$M_k = \begin{pmatrix} |p|^2+|q|^2+1 & 2p\bar{q}+(|p|^2-|q|^2)j \\ 2\bar{p}q+(|q|^2-|p|^2)j & |p|^2+|q|^2-1 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Соответствующий шар касается единичного шара в точке

$$t_k = \frac{-2p\bar{q}+(|q|^2-|p|^2)j}{|p|^2+|q|^2}$$

и имеет радиус $r = \frac{1}{|p|^2+|q|^2-1}$.