Задачи к курсу В. А. Клепцына

Задача 1. Представьте себе, что в каждой точке плоскости сидит маленькая лягушка, причём распределение лягушек имеет единичную плотность (можно считать, что лягушки сидят в вершинах решётки с шагом δ и имеют массу δ^2). Допустим, что по команде «Ап!» все лягушки одновременно прыгают, причём лягушка, сидящая в точке $\vec{x} = (x_1, x_2)$, прыгает на вектор $\varepsilon\vec{v}(\vec{x}) = \varepsilon(v_1(x_1, x_2), v_2(x_1, x_2))$, а коэффициент ε очень мал. Найдите (в первом порядке по ε!) получившуюся после прыжков плотность.

Ответ. $1 - \varepsilon \operatorname{div} \vec{v}$, где

$$\operatorname{div} \vec{v}(\vec{x}) = \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{\vec{x}} + \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{\vec{x}}. \tag{1}$$

Определение 1. Величина $\operatorname{div} \vec{v}(\vec{x})$, заданная (1), называется *дивергенцией* векторного поля[1] $\vec{v}$.

Задача 2. В условиях предыдущей задачи, пусть (параметрически) задана ориентированная кривая $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$. Какая общая масса лягушек её пересечёт при своём прыжке, если перепрыгивание слева направо считать с плюсом, а справа налево — с минусом?

Ответ.

$$\varepsilon \int_\gamma \langle \vec{v}, \vec{n}\rangle\, dl = \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} \left\langle \vec{v}(\gamma(t)), \begin{pmatrix} \gamma_2'(t) \\ -\gamma_1'(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt =$$

$$= \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} (v_1(\gamma(t))\gamma_2'(t) - v_2(\gamma(t))\gamma_1'(t))\, dt \tag{2}$$

Определение 2. Величина, заданная (2), называется *потоком векторного поля $\vec{v}$ через кривую γ*.

Задача 3. Докажите формулу Гаусса-Остроградского (являющуюся, на самом деле, частным случаем формулы Стокса из дифференциальной геометрии): пусть на плоскости задана область D, тогда

$$\iint_D \operatorname{div} \vec{v}(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = \int_{\partial D} \langle \vec{v}, \vec{n}\rangle\, dl.$$

Указание. Если где чего прибыло, то оно откуда-нибудь убыло.

Задача 4. Решите задачи 1-3 для случая $\mathbb{R}^3$ (дав соответствующие определения).

Задача 5. Пусть векторное поле $\vec{E}$ в $\mathbb{R}^3$ — поле электрической напряжённости, создаваемое точечным зарядом, находящимся в начале координат:

$$\vec{v}(\vec{r}) = \frac{1}{r^2}\vec{e}_r, \qquad \text{где } \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}.$$

a) Найдите его дивергенцию.

b) Найдите его поток через сферу радиуса R с центром в нуле.

c) Объясните кажущееся противоречие и вид зависимости от R ответа в пункте b.

d) Чему равен поток поля $\vec{E}$ через произвольную замкнутую поверхность Γ?

Задача 6. Пусть векторное поле $\vec{E}$ в $\mathbb{R}^3$ — электрическое поле, созданное зарядом, распределённым с плотностью ρ.

---

[1] Векторное поле — функция, каждой точке сопостовляющая вектор; примерами являются поле скоростей для течения жидкости, поле сил, напряжённость электрического или магнитного поля, …

a) Чему равен поток поля $\vec{E}$ через замкнутую поверхность Γ, ограничивающую область D?

b) Найдите дивергенцию $\operatorname{div} \vec{E}$.

Ответ. $\boxed{\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho}$ — одно из уравнений Максвелла.

Задача 7. Пусть в области на плоскости задано поле сил $\vec{F}(\vec{x})$. Найдите работу, которую оно совершает при обносе пробного тела вдоль маленького прямоугольника размера $\delta_1 \times \delta_2$, содержащего точку (x_1, x_2). Заметьте, что эта работа (в первом значащем порядке) пропорциональна площади прямоугольника.

Определение 3. Величина $\operatorname{rot}_z(\vec{x}) = -\frac{\partial F_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F_2}{\partial x_1}$, называется *ротором*[2]

Задача 8. Пусть $\vec{F}$ — векторное поле на плоскости, и некоторая область $D \subset \mathbb{R}^2$ разбита на маленькие прямоугольники.

a) Покажите, что работа, совершаемая $\vec{F}$ при обходе границы ∂D, равна сумме работ, совершаемых при обходе этих прямоугольников.

b) Представьте эту работу как интеграл по D (от чего?).

Ответ. Работа при обходе ∂D равна потоку векторного поля $\operatorname{rot}_z \vec{F}$ через поверхность D.

c) Сравните получившийся результат с формулой Гаусса-Остроградского из задачи 3.

Задача 9. Пусть $\vec{F}$ — векторное поле в $\mathbb{R}^3$. Покажите, что работа, совершаемая им при обносе маленького параллелограма со сторонами $\vec{u}$ и $\vec{v}$ и с вершиной в точке $\vec{x}$, равна скалярному произведению вектора $[\vec{u}, \vec{v}]$ и некоторого вектора $\operatorname{rot} \vec{F}(\vec{x})$. Выразите компоненты $\operatorname{rot} \vec{F}$ явно.
Ответ.

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \left(-\frac{\partial F_2}{\partial x_3} + \frac{\partial F_3}{\partial x_2}, -\frac{\partial F_3}{\partial x_1} + \frac{\partial F_1}{\partial x_3}, -\frac{\partial F_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \right).$$

Задача 10. a) Пусть задана замкнутая кривая γ в пространстве, и D — натянутый на неё контур. Покажите, что работа, совершаемая полем $\vec{F}$ при обходе вдоль γ, равна потоку поля $\operatorname{rot} \vec{F}$ через D.

b) Найдите $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F}$.

c) Зависит ли поток ротора через поверхность D от выбора поверхности D с заданной границей? Почему?

Задача 11. Закон электромагнитной индукции Фарадея утверждает, что ЭДС, создаваемая в контуре, равна (точнее, пропорциональна) производной по времени от потока магнитного поля через поверхность, натянутую на этот контур. Вспомните, что эта ЭДС равна работе, совершаемой электрическим полем над единичным зарядом при его обносе вдоль контура. После этого поймите, что этот закон может быть переформулирован в следующем виде:

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{E} = -\tfrac{1}{c} \tfrac{\partial \vec{B}}{\partial t},}$$

где c — скорость света. Это — ещё одно из уравнений Максвелла.

[2]Этот термин обычно применяется в трёхмерном пространстве и обозначает вектор — а вовсе не скаляр. Поэтому правильнее считать, что для плоского случая получается не число, а вектор, направленный по оси z, с такой единственной ненулевой компонентой.